

# Capítulo 1

## Configuraciones mínimas

”En el fondo, los científicos somos gente con suerte: podemos jugar a lo que queramos durante toda la vida.”

– Lee Smolin. Físico teórico y cosmólogo

### 1.1. Introducción

En este capítulo planteamos y solucionamos el problema de las configuraciones mínimas: *encontrar los robots modulares con el menor número posible de módulos y que son capaces de desplazarse en una y dos dimensiones, y determinar qué valores hay que aplicar a sus parámetros para realizar los diferentes modos de caminar.*

Comenzamos introduciendo las ideas previas y por qué son tan importantes las configuraciones mínimas. A continuación planteamos el problema y proponemos una metodología para su resolución. Continuamos describiendo las dos configuraciones mínimas encontradas y los diferentes modos de caminar que pueden realizar. Cada uno de ellos se estudia en detalle, proponiéndose ecuaciones para obtener el paso. Finalmente resumimos las ideas más importantes en 5 principios de locomoción.

### 1.2. Robótica modular y configuraciones mínimas

El estudio de las configuraciones mínimas fue planteado por primer vez por el autor de esta tesis[1] en el 2005. Es una idea nueva que no había sido previamente implementada ni estudiada por otros investigadores, a nuestro leal saber. En los siguientes apartados presentamos los motivos por lo que las configuraciones mínimas son importantes y algunas de sus aplicaciones.

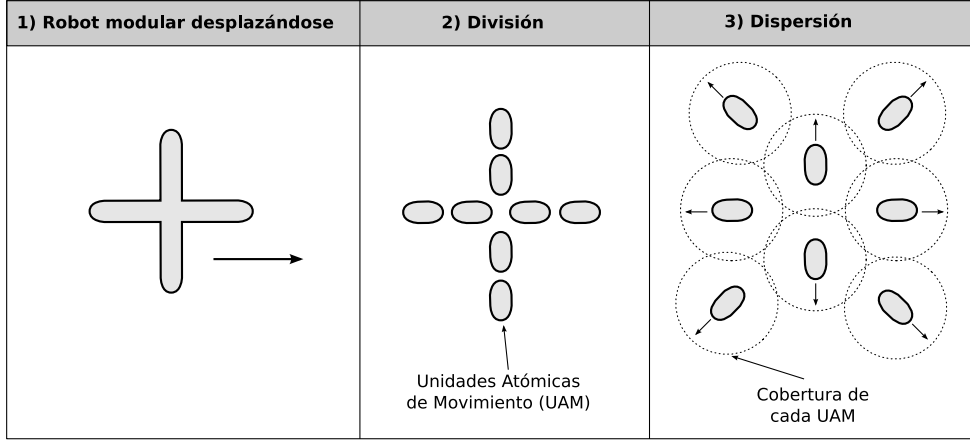


Figura 1.1: Aplicación de un robot modular autoconfigurable para maximizar la zona de cobertura

### 1.2.1. Unidades Atómicas de Movimiento (UAM)

En el campo de la locomoción de robots modulares las configuraciones mínimas constituyen una Unidad Atómica de Movimiento (UAM). Se trata de los robots modulares con menor número de módulos y que pueden desplazarse en una y dos dimensiones.

Los robots modulares autoconfigurables son aquellos que tienen la capacidad de cambiar su forma por medio de la conexión y desconexión de sus módulos. Estos robots pueden dividirse en subrobots más pequeños. La división puede continuar siempre que sus partes sean mayores o iguales a las UAM. Si uno de los módulos de una UAM se separa, ya no podrán desplazarse, perdiendo su autonomía en el movimiento.

Conociendo las configuraciones mínimas, se puede saber a priori el número máximo de subrobots autónomos ( $N$ ) que se pueden obtener a partir de un robot modular de  $M$  módulos. Vendrá dado por la relación:

$$N = \frac{M}{M_{min}} \quad (1.1)$$

donde  $M_{min}$  es el número de módulos de las UAM.

La maximización del número de partes de un robot tiene importancia en las aplicaciones en las que sea necesario maximizar una cierta área de cobertura. En ellas, cada UAM estará dotada de sensores o sistemas de comunicaciones que tienen un alcance o cobertura. Mediante la dispersión por la superficie de todas las UAM se consigue aumentar esta cobertura. En la figura 1.1 se muestra un ejemplo de esta idea en la que inicialmente se coloca en la zona un robot modular autoconfigurable de  $M$  módulos que se puede desplazar por el medio hasta alcanzar el punto objetivo. Se ha representando mediante

una estrella para indicar que podría adoptar cualquier forma para la locomoción, como por ejemplo la de un cuadrúpedo, que le permitiría superar los obstáculos más fácilmente. Una vez alcanzado el punto destino, el robot se divide en  $N$  unidades atómicas, cada una de ellas sería una configuración mínima. De esta manera, el número  $N$  será máximo (ec. 1.1). A continuación, cada una de las UAM se dispersan por el medio aumentando la zona de cobertura. Una vez finalizada la misión se vuelven a juntar formando el robot inicial y abandonando la zona de trabajo.

### 1.2.2. Maximización de la eficiencia energética

Mark Yin en su tesis doctoral[5] definió la eficiencia del movimiento de los robots modulares como la energía necesaria para desplazarse una unidad de distancia. Propuso una ecuación<sup>1</sup> para medir la eficiencia de los diferentes modos de caminar y poder determinar cuál es el mejor. En esta fórmula la eficiencia es inversamente proporcional al número de módulos. Por ello, cuanto menor sea la cantidad de módulos, más eficiente será el movimiento.

Dado que las configuraciones mínimas son las que tienen el menor número posible de módulos, serán por tanto **los robots modulares con la mayor eficiencia energética**. Podrán desplazarse la máxima distancia consumiendo la mínima energía. Esto tiene especial interés en las aplicaciones espaciales, donde se quieren emplear los robots modulares para la exploración de otros planetas[6][4][2].

### 1.2.3. Análisis y síntesis de modos de caminar

El conocimiento de las configuraciones mínimas y de la coordinación para lograr su desplazamiento se puede aplicar al estudio del movimiento de otros robots modulares, bien para su análisis o para su síntesis. Proponemos la idea de identificar partes de los robots de estudio con las configuraciones mínimas y así poder analizar su movimiento utilizando los conocimientos aprendidos con ellas.

Como se muestra en el apartado 1.4, las configuración mínima para moverse en una dimensión está constituida por la unión de dos articulaciones de cabeceo. Cualquier robot modular en el que se identifique una estructura similar, podrá ser objeto de estudio desde la perspectiva de la configuración mínima. En la figura 1.2 se muestra un ejemplo aplicado a los robots JL-I[9] y M-TRAN II[3]. El primero es un robot modular ápedo autopropulsado, en el que sus módulos son unidades móviles que se propulsan mediante orugas (ver apartado ??). Cuando tres de sus módulos se unen formando una cadena, su estructura se identifica con la de una configuración mínima: tres segmentos unidos por dos articulaciones de tipo cabeceo. Por tanto, aplicando la coordinación estudiada para ella, se puede conseguir que JL-I se mueva mediante movimientos corporales, sin usar las orugas. Esta forma de caminar no había sido previamente prevista por sus creadores[8].

---

<sup>1</sup>La ecuación se puede encontrar en la página 96 de su tesis


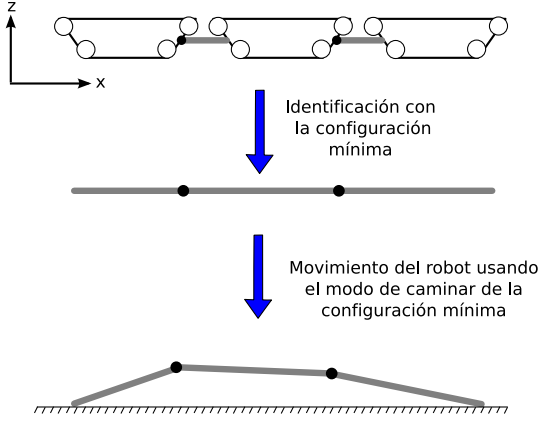

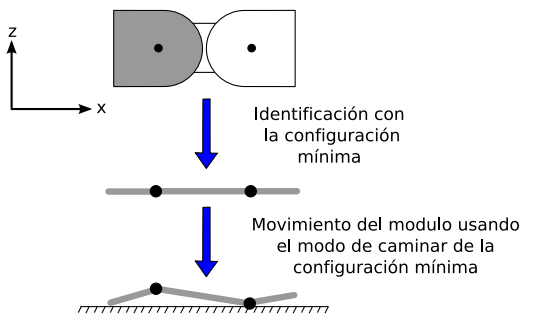
Robot JL-I	Estudio del movimiento
	
M-TRAN	Estudio del movimiento
	

Figura 1.2: Ejemplo de análisis del movimiento de los robots JL-I y M-TRAN utilizando las configuraciones mínimas

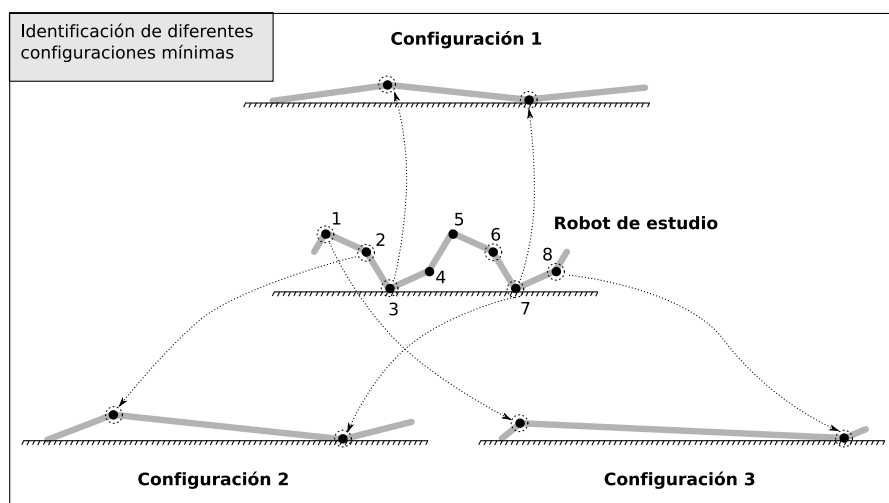


Figura 1.3: Estudio del movimiento de un robot ápodico de 8 módulos utilizando las configuraciones mínimas

Los módulos del robot M-TRAN tienen dos grados de libertad y nuevamente se pueden identificar con la configuración mínima de tipo PP. Por ello, estos módulos constituyen por sí solos una UAM. En los artículos que describen estos módulos no se menciona esta propiedad ni se han realizado experimentos de locomoción usando únicamente un módulo. Se diseñaron con dos grados de libertad para que haya 6 superficies de interconexión con módulos adyacente y poder formar estructuras sólidas. Sin embargo, utilizando la técnica de análisis propuesta se ha deducido que constituyen una UAM.

Otro ejemplo del uso de esta técnica se puede aplicar a la locomoción de los robots del grupo cabeceo-cabeceo, como se muestra en la figura 1.3. Un robot de 8 módulos se puede mover tal y como se ha explicado detalladamente en el capítulo ??, utilizando ondas que se propagan por su cuerpo. Sin embargo, se pueden identificar diferentes configuraciones mínimas. Si se toman como referencia las articulaciones 3 y 7 y el resto se dejan en su estado de reposo (con un ángulo de doblaje de cero grados) se tiene la configuración 1. El robot ahora es equivalente a una configuración mínima donde la propulsión se consigue sólo mediante dos articulaciones. También se muestran otras dos configuraciones, la 2 y la 3 obtenidas tomando como referencia los módulos 2 y 7 para una y 1 y 8 para la otra respectivamente.

Esta técnica, además, es muy útil para poder identificar rápidamente si una determinada configuración de un robot modular puede desplazarse. En la figura 1.4 se muestra un robot modular con topología de dos dimensiones y con forma de cruz. Todas las articulaciones son de tipo cabeceo. Una pregunta que cabría hacerse es si esta configuración puede moverse. Para encontrar sus movimientos se podrían aplicar las mismas técnicas de algoritmos genéticos que se han usado para encontrar los modos de caminar de los robots ápodicos del grupo cabeceo-viraje. Pero también se puede hacer un análisis rápido obteniendo el modelo alámbrico e identificando las configuraciones mínimas. Se puede ver que el robot está formado por dos de ellas, una orientada en el eje  $x$  y la otra en el eje  $y$ . Por

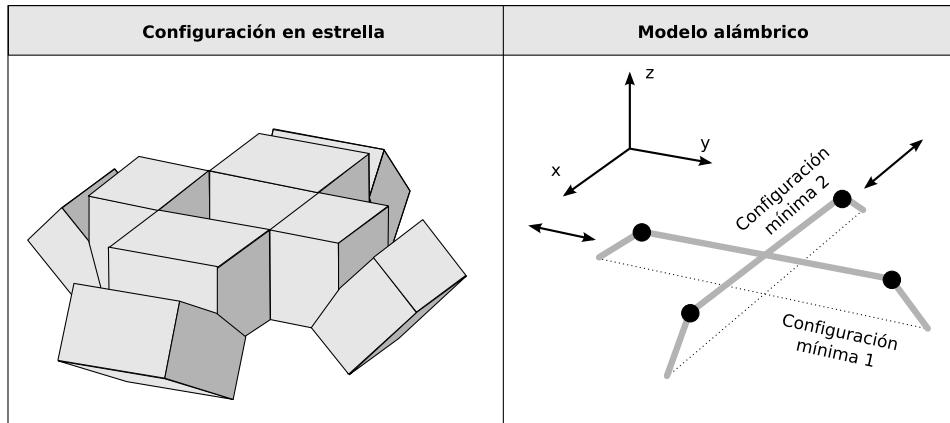


Figura 1.4: Estudio del movimiento de una configuración en cruz de cuatro módulos, utilizando el análisis por configuraciones mínimas

tanto, este robot parece que puede desplazarse de forma independiente por cada uno de estos ejes aplicando la coordinación encontrada para la configuración PP. Además, parece lógico pensar que si se superponen los dos movimientos a la vez, el robot se moverá en la dirección diagonal. Estas ideas “intuitivas” permite obtener mecanismos de coordinación candidatos para su posterior comprobación en experimentos con simuladores o robots reales. Tal es el caso de esa configuración en cruz.

#### 1.2.4. Diseño y comprobación de módulos

En la robótica modular el diseño se centra en los módulos y a partir de ellos se construyen los robots. Durante la fase de diseño y pruebas habrá que construir al menos  $M_{min}$  prototipos de módulos y con ellos crear una configuración mínima y comprobar si se desplaza correctamente. Esto permitirá fabricar sólo los prototipos necesarios para las pruebas, abaratando los costes del diseño. Lo mismo ocurre en las pruebas de simulación, en las que habrá que probar, al menos, que la configuración mínima se puede desplazar.

A la hora de diseñar robots modulares para ciertas aplicaciones, las configuraciones mínimas se pueden usar como criterio de diseño. Por ejemplo, como en el caso del robot M-TRAN, si el módulo se diseña con dos articulaciones de cabeceo cabeceo, constituirá de por sí una UAM.

En las aplicaciones de autoensamblado tras una explosión[7] propuestas recientemente por Mark Yim y su equipo (más información en el apartado ??), las configuraciones mínimas deben ser tenidas en cuenta. Existen dos alternativas. Una es construir las UAM a partir de los módulos existentes, con uniones fuertes entre ellos (usando tornillos por ejemplo). Entre las diferentes UAM las uniones deberán ser reversibles, de forma que al recibir el impacto se puedan separar sin sufrir daños (usando imanes permanente por ejemplo). La otra opción es construir módulos que ya de por sí formen las UAM y que por tanto se puedan mover. Se diseñaría un módulo equivalente a una configuración mínima.

## 1.3. Problema a resolver

### 1.3.1. Planteamiento

El problema a resolver es encontrar las configuraciones de robots ápodos con el menor número posible de módulos que puedan desplazarse en una y dos dimensiones. Hay que encontrar, por tanto, el número mínimo de módulos necesario  $M_{min}$  y resolver el problema de la coordinación para lograr su movimiento.

La solución para la coordinación ahora no tiene que ser válida para en el caso general de  $M$  módulos, sino únicamente para las configuraciones de  $M_{min}$  módulos. Por ello no se describen utilizando ondas globales ni características relacionadas con la forma del robot (espacio de formas) sino que utilizaremos directamente los parámetros de control de los espacios  $H_1$  y  $H_2$ . Estas soluciones serán puntos en esos espacios.  $H_1$  para la configuración PP y  $H_2$  para la PYP.

### 1.3.2. Esquema

El esquema para abordar el problema es similar al propuesto para solucionar la locomoción de robots ápodos en dos dimensiones (apartado ??), sólo que ahora el espacio empleado es el de control ( $H_2$ ) en vez del de formas ( $h_2$ ). El esquema del planteamiento para la locomoción en dos dimensiones propuesto en la figura ?? se aplica igual en este caso. Cada modo de caminar está asociado a un subespacio de control que llamaremos  $G_i$ . Éstos están caracterizados por unas ecuaciones paramétricas que establecen relaciones entre sus parámetros, determinado los grados de libertad.

Las dimensiones del robot durante el movimiento así como los parámetros cinemáticos del paso y paso angular dependerán del punto de trabajo  $p$  escogido. Estarán determinados por las funciones  $lx_i(p)$ ,  $ly_i(p)$ ,  $h_i(p)$ ,  $\Delta\gamma_i$  y  $\overrightarrow{\Delta r_i}(p)$ , que dependen del espacio  $G_i$ .

### 1.3.3. Metodología

La metodología es similar a la presentada en el apartado ??. La única diferencia es que a la hora buscar los modos de caminar hay que realizarlo sobre configuraciones con diferentes números de módulos, comenzando por  $M = 1$ .

1. Buscar los modos de caminar de la configuración con  $M_i$  módulos
  - a) Iterar  $M_i$  desde 1 hasta que se encuentra solución
  - b) Encontrar los modos de caminar de la configuración de  $M_i$  módulos

- c) Si se encuentran soluciones,  $M_i$  es la configuración mínima. Sino incrementar  $M_i$  y volver al punto b).
2. Caracterizar los subespacios de control  $G_j$
3. Validar los resultados en simulación y con robots reales
4. Obtener las ecuaciones de las dimensiones del robot ( $l x_j(p)$ ,  $l y_j(p)$ ,  $h_j(p)$ ), para cada subespacio  $G_j$ .
5. Obtener las ecuaciones de los parámetros cinemáticos ( $\Delta \gamma_j$  y  $\overrightarrow{\Delta r_j}(p)$ ) de cada Subespacio
6. Resolver los problemas de la cinemática directa e inversa

### 1.3.3.1. Búsquedas de soluciones

Hay que explorar el espacio de control  $H_2$  para encontrar los diferentes modos de caminar para cada una de las configuraciones de  $M_i$  módulos. Para ello se parte de la configuración de  $M = 1$  y se van incrementando el número de módulos. Se realiza este proceso hasta que se llegue a la primera configuración capaz de realizar varios modos de caminar.

La forma de realizar las búsquedas para una configuración de  $M_i$  módulos es por medio de algoritmos genéticos, de manera similar a como se indicó en el apartado ??.

Otra manera de abordar el problema sería utilizar algoritmos genéticos en el que el genotipo lleve la información sobre el número de módulos  $M_i$ , lo que permitiría explorar a la vez robots con diferentes números de módulos, en vez de tener que iterar sobre  $M_i$ , buscando las soluciones para cada uno de ellos. Se ha optado por esta segunda solución porque se sabe a priori que  $M$  va a ser un valor pequeño.

Para el caso del movimiento en línea recta se sabe que el número mínimo de módulos para que el robot se pueda desplazar de manera estable mediante ondas globales es  $M = 5$  (??). Por ello, sólo habría que probar como máximo 4 configuraciones en el caso peor hasta encontrar una que pueda moverse en línea recta. Lo mismo ocurre para el movimiento de desplazamiento lateral, donde se garantiza que para  $M \geq 6$  el robot puede desplazarse (??). Para el caso de la rotación el movimiento se garantizó para  $M \geq 8$ .

Por ello, en el peor de todos los casos, para encontrar el robot mínimo que pueda desplazarse con todos esos modos de caminar habría que probar como máximo 7 configuraciones. Hemos escogido el algoritmo iterativo por ser más simple de implementar y permitir, incluso, realizar las iteraciones ejecutando secuencialmente el programa de búsquedas de manera manual: primero con  $M = 1$ , luego con  $M = 2$ , etc. o ejecutar los 7 programas en paralelo.

Si no se conociese a priori cuál es ese número  $M$ , entonces la opción de codificar el número de módulos en el genotipo sería muchísimo más óptima que una búsqueda secuencial.

### 1.3.4. Cinemática

Los pasos para resolver los problemas de la cinemática directa e inversa son similares a los empleado para el caso de la locomoción de los robots ápodos de  $M$  módulos (apartado ??), pero sin la necesidad de realizar transformaciones entre el espacio  $h_2$  y  $H_2$ . Puesto que el espacio de búsquedas es directamente el espacio de control  $H_2$ , los pasos se simplifican.

#### 1.3.4.1. Cinemática Directa

**Enunciado** *Dado un punto  $P$  del espacio de control  $H_2$  que determina los parámetros de los generadores sinusoidales ( $A_v, A_h, \Delta\phi_v, \Delta\phi_h, \Delta\phi_{vh}$ ) determinar el tipo de movimiento, sus parámetros cinemáticos y sus dimensiones*

Denominaremos espacio  $G$  a la unión de todos los subespacios  $G_i$ . Los pasos a seguir son:

1. Si  $P$  NO está en  $G$  se trata de un punto inválido. Esos valores de los parámetros son incorrectos y no hacen que se mueva en ninguno de los modos de caminar previstos.
2. Si  $P$  pertenece a  $G$  será un punto válido. Determinar el subespacio  $G_i$  al que pertenece, comprobando si cumple las ecuaciones que lo caracterizan. Con ello conoceremos el tipo de movimiento que realizará el robot.
3. Aplicar las ecuaciones de las dimensiones  $l_{x_i}(P), l_{y_i}(P), h_i(P)$  y de los parámetros cinemáticos  $\vec{\Delta r}_i(P)$  y  $\Delta\gamma_i(P)$ .

#### 1.3.4.2. Cinemática inversa

**Enunciado:** *Dadas unas restricciones en los parámetros cinemáticos y/o en las dimensiones del robot, y conocido el modo de caminar, encontrar los parámetros de los generadores que hay que aplicar.*

Los pasos generales son los siguientes:

1. Obtener el espacio  $G_i$  asociado al modo de caminar
2. Aplicar las restricciones y particionar el subespacio  $G_i$ . Una de esas particiones será directamente el espacio solución.

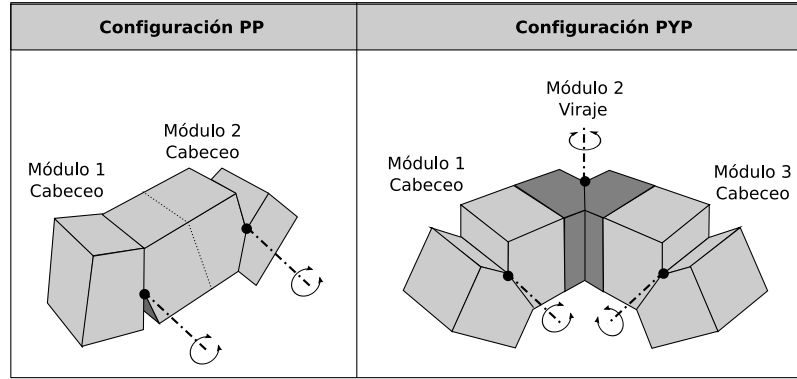


Figura 1.5: Las configuraciones mínimas PP y PYP

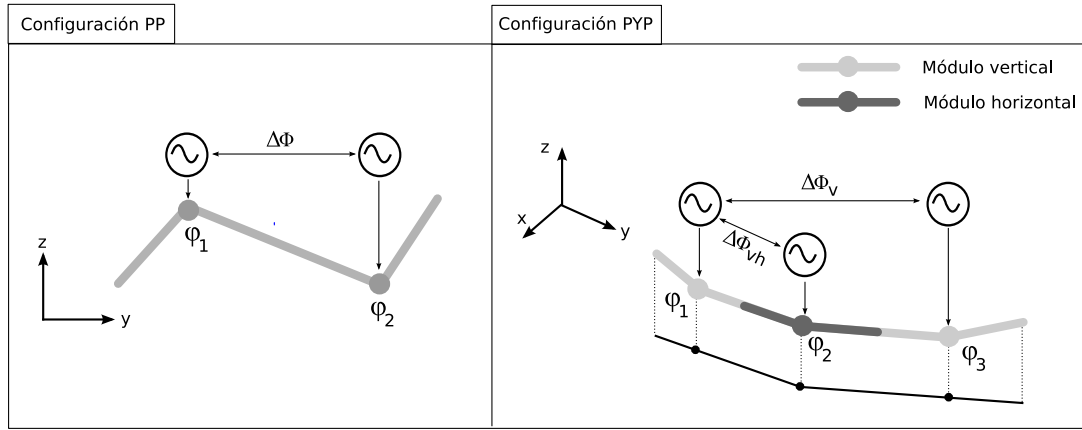


Figura 1.6: Modelo de control de las configuraciones mínimas PP y PYP

## 1.4. Configuraciones PP y PYP

### 1.4.1. Soluciones encontradas

Siguiente la metodología descrita en el apartado 1.3.3 las configuraciones mínimas son las dos mostradas en la figura 1.5. Las denominamos configuración PP y PYP (del inglés *Pitch-Pitch* y *Pitch-Yaw-Pitch*). La primera está constituida por dos módulos de tipo cabeceo. Se puede desplazar en línea recta, hacia adelante y hacia atrás. La segunda está formada por tres módulos. Los de los extremos son de tipo cabeceo y el central de viraje. Puede desplazarse al menos mediante cinco modos de caminar diferentes (apartado 1.3.3).

### 1.4.2. Modelos de control

El modelo de control está basado en los generadores sinusoidales introducidos en el apartado ??, particularizado para las configuraciones de dos y tres módulos. El esquema general de control se muestra en la figura 1.7.

#### 1.4.2.1. Configuración PP

Se utilizan dos generadores. Los ángulos de doblaje están descritos mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= A \sin(\phi) \\ \varphi_2 &= A \sin(\phi + \Delta\phi)\end{aligned}\tag{1.2}$$

El espacio de control  $H_1$  tiene dos dimensiones, la misma que para el caso de los robot ápodos con mayor número de módulos. Los puntos son de la forma  $(A, \Delta\phi)$ .

#### 1.4.2.2. Configuración PYP

Se emplean tres generadores. Dos de ellos para el control de las articulaciones verticales y uno para las horizontales. Los ángulos de doblaje varían de la forma:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= A_v \sin(\phi) \\ \varphi_2 &= A_h \sin(\phi + \Delta\phi_{vh}) \\ \varphi_3 &= A_v \sin(\phi + \Delta\phi_v)\end{aligned}$$

El espacio de control  $H_2$  está formado por 4 parámetros:  $A_v$ ,  $A_h$ ,  $\Delta\phi_v$  y  $\Delta\phi_{vh}$ . El parámetro  $\Delta\phi_h$  no tiene sentido, ya que sólo existe un módulo horizontal. Este espacio tiene por tanto una dimensión menor que en el caso general del movimiento de los robots del grupo cabeceo-viraje de  $M$  módulos.

### 1.4.3. Modelos cinemáticos

#### 1.4.3.1. Configuración PP

##### Geometría

Los modelo geométrico y cinemático de la configuración PP se muestran en la figura 1.7. Esta configuración está formada por la unión en cadena de dos módulos de tipo cabeceo. Tiene dos articulaciones,

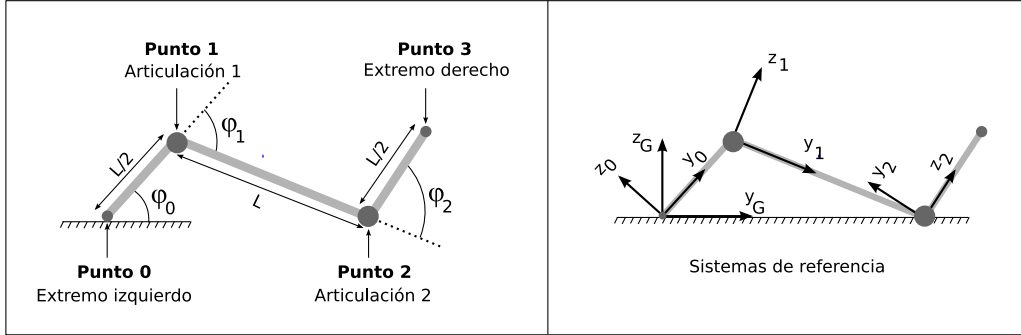


Figura 1.7: Modelo geométrico y cinemático de la configuración PP

con ángulos de doblaje  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , y tres segmentos rígidos de longitudes  $L/2, L$  y  $L/2$ . Definimos el ángulo  $\varphi_0$  como el que forma el segmento izquierdo con la horizontal y determina la orientación del robot.

Para el estudio cinemático nos interesan cuatro puntos: los dos extremos (izquierdo y derecho) y las dos articulaciones. Utilizaremos la nomenclatura  $P_0, P_1, P_2$  y  $P_3$  para referirnos a ellos. Sus vectores de posición respecto al sistema de referencia  $G$  los denotamos por  $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$  y  $\vec{r}_3$ .

### Sistemas de referencia

Emplearemos cuatro sistemas de referencia diferentes que se muestran en la figura 1.7. El sistema  $R_G$  está situado sobre  $P_0$  y su eje  $y_G$  es paralelo al suelo. El sistema  $R_0$  está sobre  $P_1$  con su eje  $y_0$  a lo largo del segmento izquierdo del robot. Se encuentra rotado un ángulo  $\varphi_0$  con respecto a  $R_G$ .  $R_1$  y  $R_2$  están sobre los puntos  $P_2$  y  $P_3$  respectivamente. El primero está rotado un ángulo  $\varphi_1$  con respecto a  $R_0$  y el segundo  $\varphi_2$  sobre  $R_1$ .

### Vectores de posición de los puntos principales

Los vectores de posición expresados en el sistema de referencia  $R_G$  se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_0 &= \vec{r}_G^0 = 0 \\
 \vec{r}_1 &= \vec{r}_G^1 = H_G^0 \vec{r}_0^1 \\
 \vec{r}_2 &= \vec{r}_G^2 = H_G^0 H_1^1 \vec{r}_1^2 \\
 \vec{r}_3 &= \vec{r}_G^3 = H_G^0 H_1^1 H_2^2 \vec{r}_2^3
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Donde  $H_b^a$  representa la transformada homogénea del sistema de referencia  $a$  al  $b$ . Son matrices que están dadas por las rotaciones del eje  $x$  y las traslaciones en el eje  $y$ . Las expresamos con la notación:

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_y(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices  $H_b^a$  se calculan así:

$$H_G^0 = R_x(\varphi_0), \quad H_0^1 = T_y\left(\frac{L}{2}\right) R_x(\varphi_1), \quad H_1^2 = T_y(L) R_x(\varphi_2) \quad (1.4)$$

Los vectores  $\vec{r}_b^a$  indican la posición del punto  $a$  referido al sistema  $b$ . Son:

$$\vec{r}_0^1 = \frac{L}{2}\hat{y}_0, \quad \vec{r}_1^2 = L\hat{y}_1, \quad \vec{r}_2^3 = \frac{L}{2}\hat{y}_2 \quad (1.5)$$

Sustituyendo las expresiones 1.5 y 1.4 en 1.3 se obtienen los vectores de posición de todos los puntos referidos al sistema  $R_G$ .

### Centro de masas

La expresión para el centro de masas se obtiene aplicando los vectores de posición 1.3 previamente calculados en la expresión general del centro de masas de un robot ápedo ???. Particularizando para  $M = 2$  obtenemos su expresión:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{8} (3\vec{r}_1^1 + 3\vec{r}_2^2 + \vec{r}_3^3)$$

### Representación mediante números complejos

La geometría de la configuración PP se puede expresar mediante números complejos. Tomaremos el plano  $zy$  como el plano complejo. Los tres segmentos que forman la configuración los denotaremos mediante los números complejos  $z_0$ ,  $z_1$  y  $z_2$ . Sus módulos representan la longitud y sus argumentos los ángulos que forman con el eje  $y$ . Sus expresiones son:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{L}{2} e^{j\varphi_0} \\ z_1 &= L e^{j(\varphi_0 + \varphi_1)} \\ z_2 &= \frac{L}{2} e^{j(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

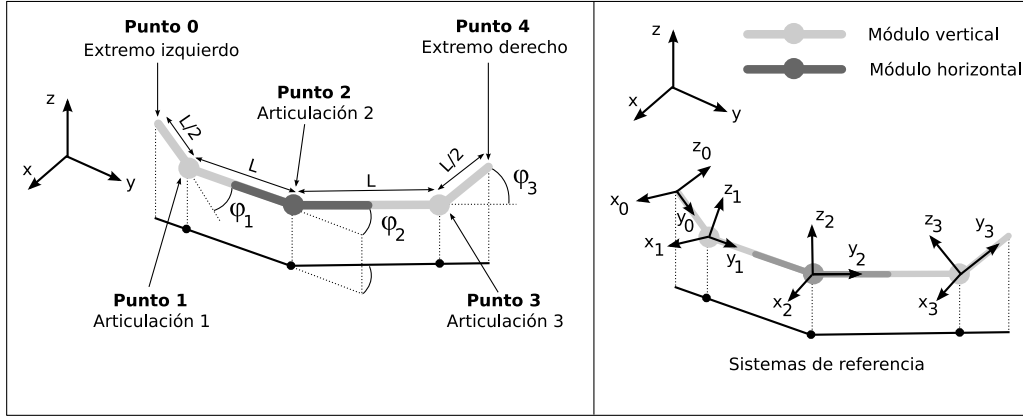


Figura 1.8: Modelo geométrico y cinemático de la configuración PYP

El ángulo que forma el segmento derecho con el eje  $y$  es el argumento del complejo  $z_2$  y es igual a la suma de los  $\varphi_i$ :

$$\arg(z_2) = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 \quad (1.6)$$

Los puntos se pueden expresar mediante sumas de estos complejos:

$$\begin{aligned} P_0 &= 0 \\ P_1 &= z_0 \\ P_2 &= z_0 + z_1 \\ P_3 &= z_0 + z_1 + z_2 \end{aligned}$$

#### 1.4.3.2. Configuración PYP

##### Geometría

Los modelo geométrico y cinemático de la configuración PYP se muestran en la figura 1.8. Esta configuración está formada por la unión en cadena de dos módulos de tipo cabeceo y uno de viraje situado en el centro. Tiene por tanto tres articulaciones, con ángulos de doblaje  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , y  $\varphi_3$ , y cuatro segmentos rígidos de longitudes  $L/2, L, L$  y  $L/2$ .

Los puntos principales son cinco: las tres articulaciones más los dos extremos. Utilizaremos la nomenclatura  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$  para referirnos a ellos. Sus vectores de posición respecto al sistema de referencia  $R_0$  los denotamos por  $\vec{r}_0$ ,  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$ ,  $\vec{r}_3$  y  $\vec{r}_4$ .

### Sistemas de referencia

Utilizaremos cuatro sistemas de referencia, situados en los puntos  $P_0, P_1, P_2, P_3$  y  $P_4$  que llamaremos  $R_0, R_1, R_2, R_3$  y  $R_4$ . Además hace falta un sistema de referencia ligado al suelo  $R_G$  que permita especificar la orientación del robot.

### Vectores de posición de los puntos

Los vectores de posición expresados en el sistema de referencia  $R_0$  se calculan:

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &= 0 \\ \vec{r}_1 &= \vec{r}_0^1 \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_0^2 = H_0^1 \vec{r}_1^2 \\ \vec{r}_3 &= \vec{r}_0^3 = H_0^1 H_1^2 \vec{r}_2^3 \\ \vec{r}_4 &= \vec{r}_0^4 = H_0^1 H_1^2 H_2^3 \vec{r}_3^4\end{aligned}\tag{1.7}$$

Donde  $H_b^a$  representa la transformada homogénea del sistema de referencia  $a$  al  $b$ . Están dadas por las rotaciones alrededor de los ejes  $x$  y  $z$ , y las traslaciones en el eje  $y$ . Usaremos la notación:

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_y(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las matrices  $H_b^a$  se calculan así:

$$H_0^1 = T_y\left(\frac{L}{2}\right) R_x(\varphi_1), H_1^2 = T_y(L) R_z(\varphi_2), H_2^3 = T_y(L) R_x(\varphi_3)\tag{1.8}$$

Los vectores  $\vec{r}_b^a$  indican la posición del punto  $a$  referido al sistema  $b$ . Son:

$$\vec{r}_0^1 = \frac{L}{2}\hat{y}_0, \vec{r}_1^2 = L\hat{y}_1, \vec{r}_2^3 = L\hat{y}_2, \vec{r}_3^4 = \frac{L}{2}\hat{y}_3\tag{1.9}$$

Sustituyendo las expresiones 1.9 y 1.8 en 1.7 se obtienen los vectores de posición de todos los puntos referidos al sistema  $R_G$ .

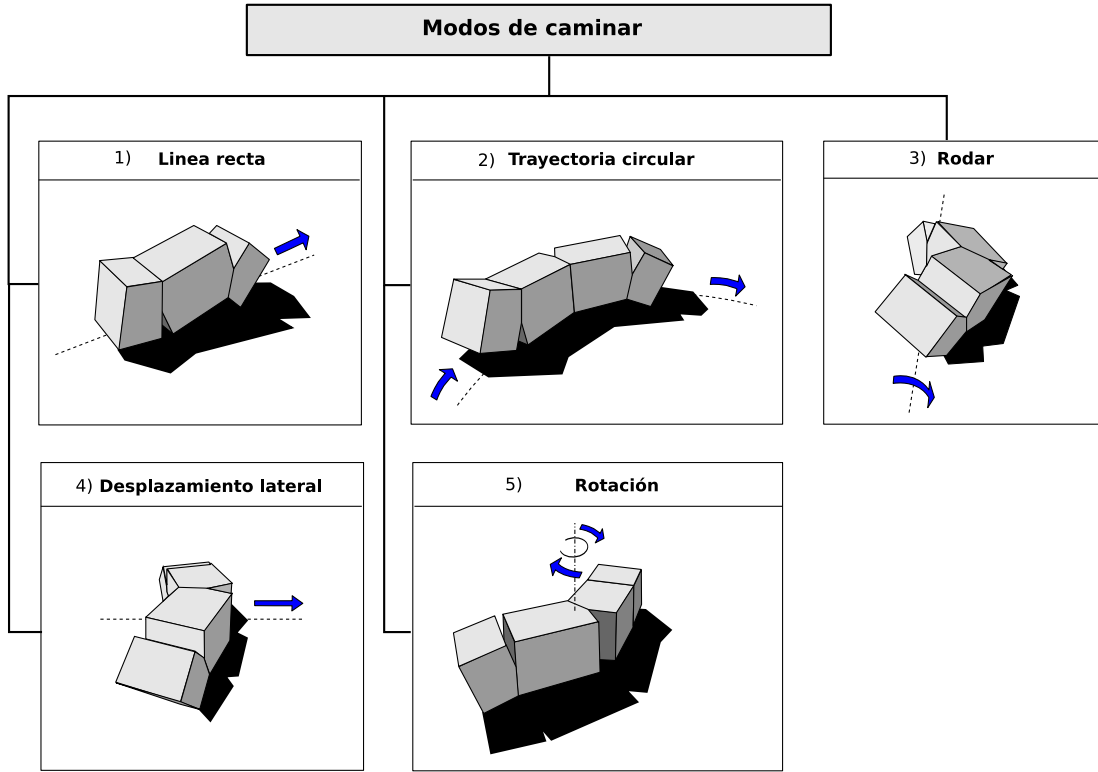


Figura 1.9: Modos de caminar de las configuraciones mínimas

### Centro de masas

La expresión para el centro de masas se obtiene aplicando los vectores de posición 1.7 previamente calculados en la expresión general del centro de masas de un robot ápedo ???. Particularizando para  $M = 3$  queda la expresión:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{12} (3\vec{r}_1 + 4\vec{r}_2 + 3\vec{r}_3 + \vec{r}_4)$$

## 1.5. Modos de caminar

### 1.5.1. Soluciones encontradas

Se han encontrado 5 modos de caminar para la configuración PYP: línea recta, trayectoria circular, desplazamiento lateral, rodar y rotar (figura 1.9). Todos ellos son totalmente nuevos y no habían sido implementados ni estudiados previamente ya que no se había abordado el tema de las configuraciones mínimas hasta ahora.

Movimiento	Parámetros	Grados de libertad	Caracterización
Línea recta	$(A, \Delta\phi)$	2	$A = A_v, \Delta\Phi = \Delta\phi_v, A_h = 0, \Delta\phi_{vh} = 0$
Arco	$(A_v, A_h, \Delta\phi_v)$	3	$\Delta\phi_{vh} = 0$ . Módulo central no oscila
Rodar	$A$	1	$A = A_v = A_h, \Delta\phi_v = 0, \Delta\phi_{vh} = 90, A > A_{min}$
Lateral	$A$	1	$A = A_h, A_v \rightarrow 0, \Delta\phi_v = 0, \Delta\phi_{vh} = 90, A < A_{hL}$
Rotación	$A$	1	$A = A_h, A_v \rightarrow 0, \Delta\phi_v = 180, \Delta\phi_{vh} = 90$

Cuadro 1.1: Resumen de todos los movimientos con sus parámetros fundamentales, grados de libertad y restricciones del subespacio de control

En el **movimiento en línea recta** el módulo central permanece en su posición de reposo ( $\varphi_2 = 0$ ) y sólo se mueven las articulaciones verticales. Por tanto, la configuración PYP se comporta en realidad como una PP en la que el segmento central tiene una longitud mayor. En el apartado 1.6 se estudiará en detalle el movimiento en línea recta para la configuración PP. Todas las ideas serán aplicables para la PYP sólo rehaciendo los cálculos con otro valor de longitud del segmento central.

El **movimiento en trayectoria circular** se consigue haciendo que se mueva en línea recta pero fijando la posición del módulo central a un ángulo  $\varphi_2$  distinto de 0, de manera similar a como se hace en el caso del mismo tipo de movimiento para los robots ápodos de  $M$  módulos.

La configuración PYP, a pesar de tener sólo tres módulos, **es capaz de rodar**. Este movimiento se estudia en detalle en el apartado 1.7. La coordinación es la misma que la del caso general. Las articulaciones verticales están en fase y la horizontal está desfasada 90 grados.

El **desplazamiento lateral** es del tipo “remero”. Permite al robot moverse hacia los lados, manteniendo la misma orientación. La coordinación es la misma que en el caso del movimiento de rodar. El valor de la amplitud  $A$  determina si se ejecuta este movimiento o el de rodar (apartado 1.8).

El **movimiento de rotación** permite al robot cambiar su orientación del cuerpo para apuntar la cabeza en cualquier dirección (apartado 1.9).

### 1.5.2. Caracterización de los subespacios $G_i$

En la tabla 1.1 se resumen todos los modos de caminar encontrados para la configuración mínima PYP junto a sus parámetros, grados de libertad y la caracterización de los subespacios de control  $G_i$ .

El movimiento en línea recta tiene dos grados de libertad. Uno es la amplitud  $A$  que determina el paso y el otro la diferencia de fase  $\Delta\phi_v$  que establece la coordinación entre los segmentos para que se realice el movimiento. El módulo central queda fijado a su posición de reposo  $A_h = 0$  y el parámetro  $\Delta\phi_{vh}$  por lo que se deja a cero.

El movimiento con más grados de libertad es el del desplazamiento en trayectoria circular. Es el mismo que en línea recta pero con un parámetro más que especifica el ángulo del arco de la trayectoria. El módulo central no oscila, permanece con su posición fijada a un valor concreto distinto de cero.

El resto de movimiento tienen todos un único grado de libertad. El movimiento de rodar se caracteriza porque las dos amplitudes  $A_v$  y  $A_h$  son iguales, los módulos verticales están en fase y el central desfasado 90 grados. El parámetro  $A$  determina el ángulo del arco que adopta el robot durante el desplazamiento. Para que se realice este movimiento,  $A$  tiene que ser mayor que un valor mínima  $A_{min}$  (apartado 1.7.6).

El desplazamiento lateral se caracteriza por los mismos valores para las diferencias de fase que en el caso de rodar. Los dos módulos verticales oscilan en fase y el horizontal desfasado 90 grados. El parámetro  $A$  determina el paso del robot durante este desplazamiento. La amplitud vertical  $A_v$  no influye en el movimiento, por ello usaremos un valor cercano a 0 pero distinto. Si  $A_v = 0$  no hay desplazamiento.

Finalmente, el movimiento de rotación se caracteriza porque las articulaciones verticales están en oposición de fase ( $\Delta\phi_v = 180$ ) y la horizontal desfasada 90 grados. El parámetro  $A$  determina el ángulo de rotación y lo mismo que en el caso anterior,  $A_v$  no influye por lo que tiene que ser mayor que 0 pero lo más cercano para que el movimiento sea más estable y más eficiente.

## 1.6. Locomoción en línea recta

### 1.6.1. Descripción del movimiento

El desplazamiento en línea recta de la configuración PP se muestra en la figura 1.10. Los segmentos izquierdo y derecho hacen las veces de “patas”. La coordinación entre ellos es la que determina cómo es el movimiento. En general lo estudiamos dividiéndolo en cuatro etapas. Durante la primera el robot realiza una **contracción** quedando la articulación 1 más elevada. Aparece una mini-onda que se **propaga** durante la segunda etapa y llega hasta la parte derecha del robot. Ahora es la articulación 2 la que está más elevada. En la etapa 3 el robot se **expande** y la mini-onda desaparece. Finalmente en la cuarta el robot **recupera** su forma original.

En todo momento este movimiento es estable. La proyección del centro de masas permanece en todo momento dentro del segmento de apoyo. Sin embargo el movimiento no es uniforme como en el caso general con  $k = 2$ . Como se muestra en el capítulo de experimentos, el desplazamiento del centro de masas no varía linealmente con el tiempo.

### 1.6.2. Estudio de las etapas

#### 1.6.2.1. Puntos de apoyo

En todas las etapas el robot tiene siempre dos puntos de apoyo, lo que hace que sea estable para todas las fases. En la figura 1.11 se muestran las etapas y los puntos de apoyo. Durante los puntos de

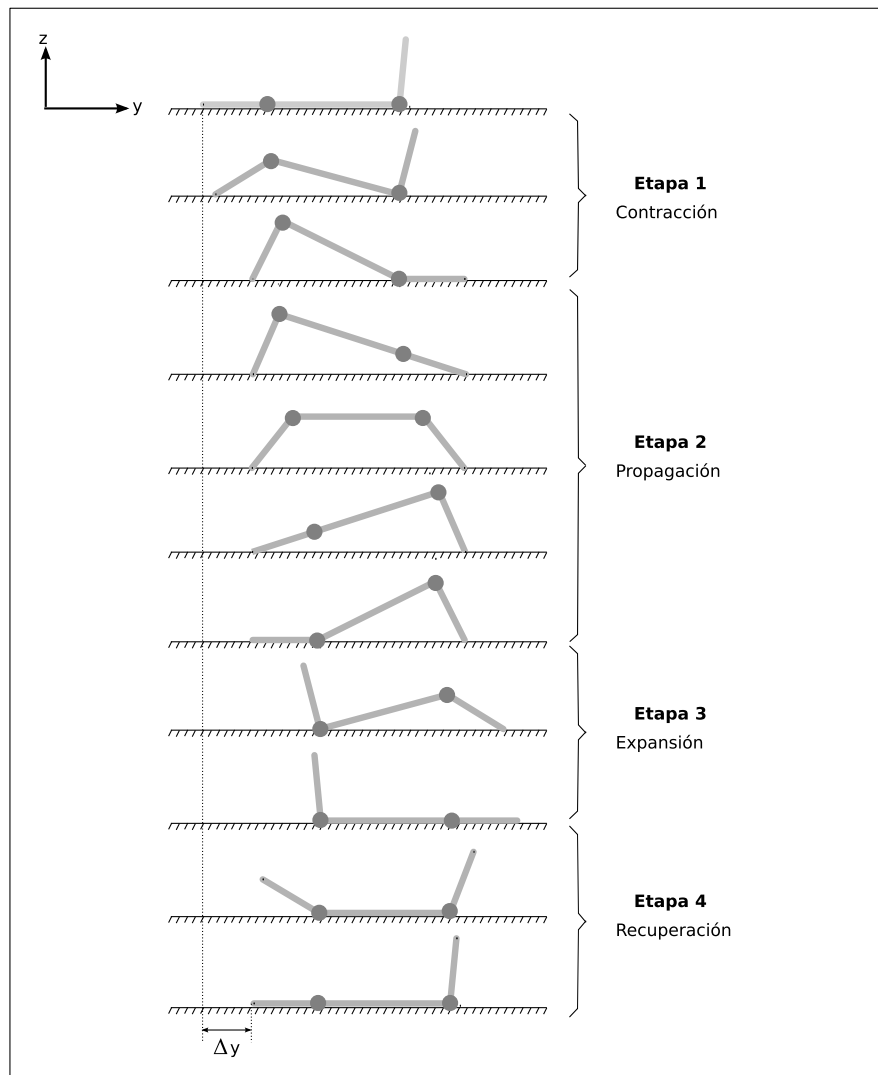


Figura 1.10: Locomoción de la configuración PP y sus diferentes etapas

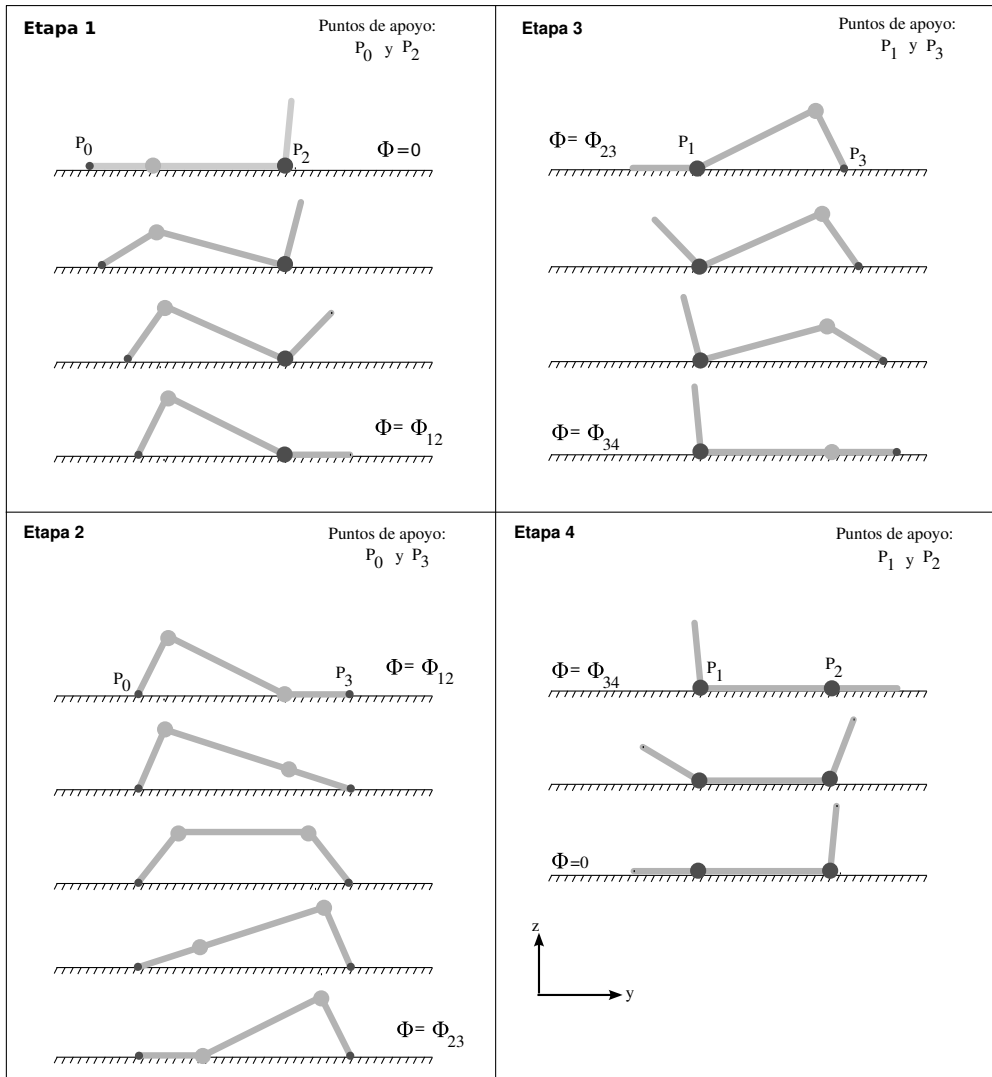


Figura 1.11: Etapas y puntos de apoyo durante la locomoción en línea recta de la configuración PP

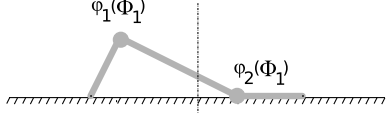
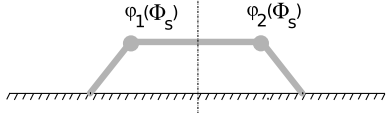
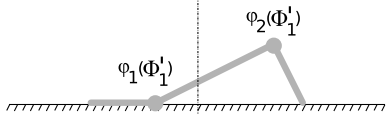
Fase	Forma del robot	Simetría
$\Phi = \Phi_1$		$\varphi_1(\Phi_1) = \varphi_2(\Phi_1')$ $\varphi_2(\Phi_1) = \varphi_1(\Phi_1')$
$\Phi = \Phi_s$		$\varphi_1(\Phi_s) = \varphi_2(\Phi_s)$
$\Phi = \Phi_1'$		$\varphi_1(\Phi_1') = \varphi_2(\Phi_1)$ $\varphi_2(\Phi_1') = \varphi_1(\Phi_1)$

Figura 1.12: Simetría de la forma del robot alrededor de la fase  $\phi_s$ 

contacto con el suelo son el  $P_0$  y  $P_2$ . El robot se va contrayendo hasta que el segmento derecho toca el suelo y los nuevos puntos de apoyo pasan a ser el  $P_0$  y  $P_3$ , situados en los extremos izquierdo y derecho respectivamente. La mini-onda se propaga hasta que en la etapa 3 el punto  $P_0$  se sustituye por el  $P_1$ . Luego el robot se expande, haciendo que la mini-onda desaparezca. En la última etapa, los dos puntos de apoyo son el  $P_1$  y  $P_2$ .

### 1.6.2.2. Simetrías

La forma del robot durante las etapas 1, 2 y 3 es simétrica con respecto a la fase  $\phi_s$ . En la figura 1.12 se muestra la forma del robot en  $\phi_s$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_1'$ . Los robots en  $\phi_1$  y  $\phi_1'$  son simétricos. Conocidos los valores de los ángulos de doblaje en  $\phi_1$ , se conocen los correspondientes en  $\phi_1'$ , dados por la expresión:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\phi_1') &= \varphi_2(\phi_1) \\ \varphi_2(\phi_1') &= \varphi_1(\phi_1)\end{aligned}\tag{1.10}$$

La fase de simetría  $\phi_s$  está dada por la expresión:

$$\Phi_s = -\left(90 + \frac{\Delta\Phi}{2}\right)$$

La ecuación que relaciona las fases simétricas  $\phi_1$  y  $\phi_1'$  es:

$$\phi_1' = -(\phi_1 + \Delta\phi + 180)\tag{1.11}$$

### Demostraciones

A partir de las expresiones de los ángulos de doblaje 1.2 se comprueba que  $\varphi_1(\phi_s) = \varphi_2(\phi_s)$ :

$$\varphi_1(\phi_s) = A \sin \phi_s = A \sin \left( -90 - \frac{\Delta\Phi}{2} \right) = A \sin \left( 90 + \frac{\Delta\Phi}{2} \right) = A \cos \left( \frac{\Delta\Phi}{2} \right)$$

$$\varphi_2(\phi_s) = A \sin(\phi_s + \Delta\Phi) = A \sin \left( -90 - \frac{\Delta\Phi}{2} + \Delta\Phi \right) = A \cos \left( \frac{\Delta\Phi}{2} \right)$$

Las expresiones 1.10 también se verifican:

$$\varphi_1(\phi_1) = A \sin(\phi_1) = A \sin(-(\phi_1 + \Delta\phi + 180)) = -A \sin(\phi_1 + \Delta\phi + 180) = A \sin(\phi_1 + \Delta\phi) = \varphi_2(\phi_1)$$

$$\varphi_2(\phi_1) = A \sin(\phi_1 + \Delta\phi) = A \sin(-(\phi_1 + \Delta\phi + 180) + \Delta\phi) = A \sin(-(\phi_1 + 180)) = A \sin(\phi_1) = \varphi_1(\phi_1)$$

#### 1.6.2.3. Segmentos de apoyo

Denominamos segmento de apoyo a aquel que une los puntos de apoyo y lo denotamos por  $Sa_i$  donde el subíndice  $i$  indica la etapa. Cada etapa tiene un segmento de apoyo. Utilizaremos la notación de números complejos para obtener sus expresiones. Una propiedad importante de estos segmentos es que reposan sobre el suelo (eje  $y$ ) y por tanto su argumento será siempre 0. Esta es la condición que emplearemos para el cálculo del ángulo de orientación  $\varphi_0$  en el apartado 1.6.2.4.

$$\arg(Sa_i) = 0, \forall i \in \{1, 4\} \quad (1.12)$$

Las expresiones de  $Sa_i$  en función de la geometría del robot y de los ángulos  $\varphi_i$  se muestran a continuación, junto con sus módulos y argumentos. Los cálculos están desarrollados en el apéndice ??.

#### Etapas 1

$$Sa_1 = z_0 + z_1 = Le^{j\varphi_0} \left( \frac{1}{2} + e^{j\varphi_1} \right)$$

$$\|Sa_1\| = L \sqrt{\frac{5}{4} + \cos(\varphi_1)} \quad (1.13)$$

$$\arg(Sa_1) = \varphi_0 + \arctan \left( \frac{\sin(\varphi_1)}{\frac{1}{2} + \cos(\varphi_1)} \right)$$

**Etapas 2**

$$Sa_2 = z_0 + z_1 + z_2 = Le^{j\varphi_0} \left( \frac{1}{2} + e^{j\varphi_1} + \frac{1}{2}e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} \right)$$

$$\|Sa_2\| = L\sqrt{\frac{3}{2} + \cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2) + \frac{1}{2}\cos(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (1.14)$$

$$\arg(Sa_2) = \varphi_0 + \arctan\left(\frac{\sin\varphi_1 + \frac{1}{2}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\frac{1}{2} + \cos\varphi_1 + \frac{1}{2}\cos(\varphi_1 + \varphi_2)}\right)$$

**Etapas 3**

$$Sa_3 = z_1 + z_2 = Le^{j(\varphi_0+\varphi_1)} \left( 1 + \frac{1}{2}e^{j\varphi_2} \right)$$

$$\|Sa_3\| = L\sqrt{\frac{5}{4} + \cos(\varphi_2)}$$

$$\arg(Sa_3) = \varphi_0 + \varphi_1 + \arctan\left(\frac{\sin(\varphi_2)}{2 + \cos(\varphi_2)}\right)$$

**Etapas 4**

$$Sa_4 = z_1 = Le^{j(\varphi_0+\varphi_1)}$$

$$\|Sa_4\| = L$$

$$\arg(Sa_4) = \varphi_0 + \varphi_1$$

**1.6.2.4. Ángulo de orientación  $\varphi_0$** 

El ángulo de orientación  $\varphi_0$  es el que forma el segmento izquierdo del robot con la horizontal. Es necesario conocerlo para poder determinar los vectores de posición de los puntos del robot y de su

centro de masas. Este ángulo depende de la etapa en la que se encuentra el robot durante el desplazamiento. Usaremos la notación  $\varphi_0^i(\phi)$  para representar su valor en la etapa  $i$ . Para una fase  $\phi$  dada, las expresiones son:

$$\varphi_0^1(\phi) = -\arctan\left(\frac{\sin \varphi_1(\phi)}{\frac{1}{2} + \cos \varphi_1(\phi)}\right), \quad \phi \in [0, \phi_{12}] \quad (1.15)$$

$$\varphi_0^2(\phi) = -\arctan\left(\frac{\sin \varphi_1(\phi) + \frac{1}{2} \sin(\varphi_1(\phi) + \varphi_2(\phi))}{\frac{1}{2} + \cos \varphi_1(\phi) + \frac{1}{2} \cos(\varphi_1(\phi) + \varphi_2(\phi))}\right), \quad \phi \in [\phi_{12}, \phi_{23}]$$

$$\varphi_0^3(\phi) = -\varphi_1 - \arctan\left(\frac{\sin \varphi_2}{2 + \cos \varphi_2}\right), \quad \phi \in [\phi_{23}, \phi_{34}]$$

$$\varphi_0^4(\phi) = -\varphi_1(\phi), \quad \phi \in [\phi_{34}, 360]$$

Donde  $\phi_{12}$ ,  $\phi_{23}$  y  $\phi_{34}$  representan los valores de la fase que separan una fase de otra (apartado 1.6.2.5).

### Demostraciones

Las expresiones para el cálculo de  $\varphi_0$  se obtienen aplicando la condición 1.12 que establece que el argumento de todos los segmentos de apoyo es cero. Con ello se fuerza a que la orientación del robot esté determinada por la condición de que sus puntos de apoyo estén alineados y en posición horizontal.

Haciendo  $\arg(Sa_i) = 0$  y despejando  $\varphi_0$  se obtienen las ecuaciones de  $\varphi_0^i$ .

#### 1.6.2.5. Transición entre etapas

Los valores de las fases que separan unas etapas de otras los denotamos por  $\phi_{12}$ ,  $\phi_{23}$  y  $\phi_{34}$ . Están dados por las expresiones:

$$\Phi_{12} = -\arctan\left(\frac{\sin \Delta\Phi}{\left(1 - \frac{A_0}{A}\right) + \cos \Delta\Phi}\right), \quad A_0 = \arctan\left(\frac{\sin A}{\frac{1}{2} + \cos A}\right)$$

$$\Phi_{23} = -\Phi_{12} - 180 - \Delta\Phi$$

$$\Phi_{34} = -180 - \Delta\Phi$$

### Demostraciones

Calcularemos primero  $\phi_{12}$ . La condición que determina cuándo se está en la etapa 1 ó la 2 es que el segmento derecho esté apoyado sobre el eje  $y$ . Es decir, que se cumpla que  $\arg(z_2) = 0$ . Esto implica que:

$$\varphi_0^1 + \varphi_1 + \varphi_2 = 0$$

Sustituyendo  $\varphi_0$  por la expresión 1.15, los ángulos de doblaje por las dadas en 1.2 y despejando la fase se obtiene la ecuación de  $\phi_{12}$ . Los pasos seguidos están detalladas en el apéndice ??.

El cálculo de  $\Phi_{23}$  y  $\Phi_{34}$  se hace aplicando la condición de simetría 1.11 y teniendo en cuenta que son simétricos con respecto a las fases  $\phi_{12}$  y  $\phi = 0$  respectivamente.

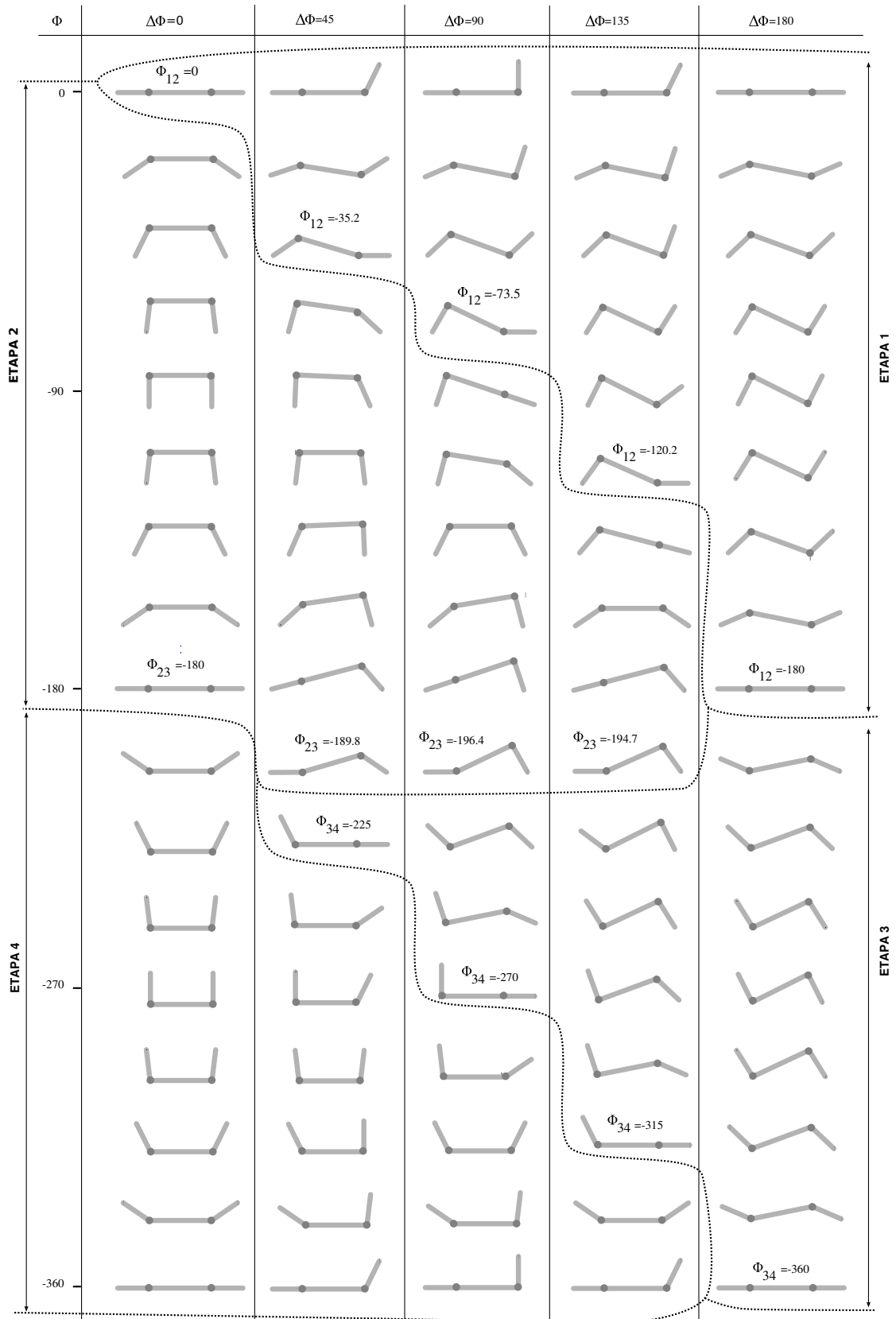
## 1.6.3. Paso

### 1.6.3.1. Coordinación

El desplazamiento en línea recta se control con los parámetros  $A$  y  $\Delta\phi$ . El primero está relacionado con el tamaño del paso y las dimensiones del robot. El segundo es el que determina la coordinación de los segmentos y que el robot se pueda desplazar.

En la figura 1.13 se muestra el movimiento del robot para diferentes valores de  $\Delta\phi$  y cómo varían con la fase  $\phi$ . Cuando las dos articulaciones están en fase ( $\Delta\phi = 0$ ) los segmentos izquierdo y derecho se mueven exactamente igual haciendo que el robot pase de estar tumbado en el suelo a tener forma de  $\sqcap$ , nuevamente tumbado, forma de  $\sqcup$  y vuelta a empezar. No existe desplazamiento. El movimiento tiene sólo dos etapas, la 2 y la 4.

Cuando las articulaciones están en oposición de fase ( $\Delta\phi = 180$ ) el robot se contrae y se expande, pero tampoco hay desplazamiento. El movimiento sólo tiene las dos etapas 1 y 3. Se cumplen por tanto el

Figura 1.13: Coordinación del movimiento en función del parámetro  $\Delta\phi$

mismo principio de generadores en fase y oposición de fase del movimiento en una dimensión de los robots ápodos.

Para el resto de valores de  $\Delta\phi$  sí existe desplazamiento. En general el movimiento dependerá de la interacción de los puntos de apoyo con el suelo. Para realizar un análisis en detalle es necesario estudiar la dinámica del sistema. Sin embargo, analizando la geometría obtendremos conclusiones sobre cómo debe realizarse la coordinación.

### 1.6.3.2. Criterio de coordinación

Para poder obtener los valores de  $A$  y  $\Delta\phi$  que permitan un movimiento bien coordinado, es necesario establecer primero un criterio para medir cómo de buena es la coordinación.

De las cuatro etapas, la fundamental para que el movimiento se realice correctamente es la 2, donde la mini-onda que ha aparecido se propaga desde la cola hasta la cabeza. Si la coordinación no es correcta, la propagación no existirá y por tanto no habrá desplazamiento. En esta etapa, los puntos de apoyo son los dos de los extremos. Consideraremos que el movimiento está mejor coordinado cuanto menor sea la interacción con el suelo y por tanto menores serán las pérdidas energéticas por rozamiento. Así, si durante esta etapa la coordinación es tal que los puntos de apoyo se mantienen siempre equidistantes, no habrá movimiento relativo entre ellos y no se producirán pérdidas por rozamiento. Además, el movimiento se independiza del medio, comportándose de manera muy parecida con independencia del valor del coeficiente de rozamiento. Por el contrario, si las articulaciones fuerzan a que esta distancia varíe durante la propagación, aparecerá un rozamiento no deseado que además de pérdidas energéticas introducirá incertidumbre en el movimiento. El movimiento será muy dependiente del tipo de superficie.

El criterio propuesto es el siguiente:

**Criterio de coordinación:** *Diremos que la configuración PP se está moviendo utilizando una buena coordinación si la distancia entre los puntos de apoyo  $P_0$  y  $P_3$  durante la etapa 2 permanece constante o su variación es mínima.*

Este criterio nos permite comparar el movimiento en diferentes puntos de trabajo. Observando el desplazamiento cuando  $\Delta\phi = 0$  de la figura 1.13, vemos que la variación de la distancia entre los puntos de apoyo en la etapa 2 es muy grande. La interacción con el suelo será alta. Si el coeficiente de rozamiento es muy alto, podría ocurrir que ni siquiera el robot sea capaz de pasar de la posición inicial a la forma de  $\sqcap$ . Para  $\Delta\phi = 45$ , la variación de la distancia es menor por lo que la interacción con el suelo disminuirá. Para  $\Delta\phi = 135$  esta distancia varía muy poco. Es un movimiento mejor coordinado que para los casos anteriores. Cuando están en oposición de fase ( $\Delta\phi = 180$ ) no existe la etapa de propagación y por tanto no hay movimiento.

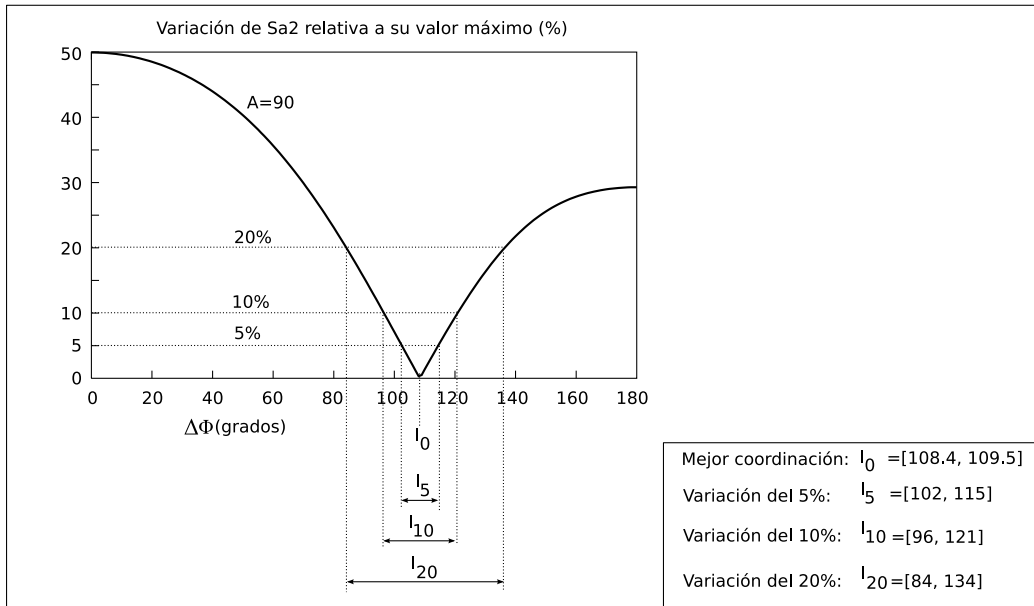


Figura 1.14: Variación relativa del segmento de apoyo 2 para una amplitud de 90 grados

Las preguntas que surgen son, ¿Qué valores de  $A$  y  $\Delta\phi$  hacen que el movimiento sea el mejor coordinado? ¿Cuál es la ecuación que relaciona el paso con estos parámetros?

### 1.6.3.3. Movimiento mejor coordinado

Aplicando el criterio de coordinación anterior los resultados que se obtienen son:

1. El **movimiento mejor coordinado** se obtiene para valores de  $\Delta\phi$  comprendidos en el intervalo  $[108,4,109,5]$ , con independencia de la amplitud  $A$  empleada. Para ellos se verifica que la variación del segmento de apoyo durante la etapa 2 es prácticamente nula.
2. Para un valor de  $\Delta\phi$  dato, **la coordinación mejora con la disminución de la amplitud**. Cuando menor sea  $A$ , menor es la variación del segmento de apoyo de la etapa 2.

En la figura 1.14 se muestra la variación relativa del segmento de apoyo 2 en función del parámetro  $\Delta\phi$  para el caso de máxima amplitud, donde la coordinación es peor. A partir de ella se pueden establecer criterios más flexibles:

- $\forall A$ , si  $\Delta\phi \in [84, 134]$ , la variación será menor o igual al 20 %
- $\forall A$ , si  $\Delta\phi \in [96, 121]$ , la variación será menor o igual al 10 %
- $\forall A$ , si  $\Delta\phi \in [102, 115]$ , la variación será menor o igual al 5 %

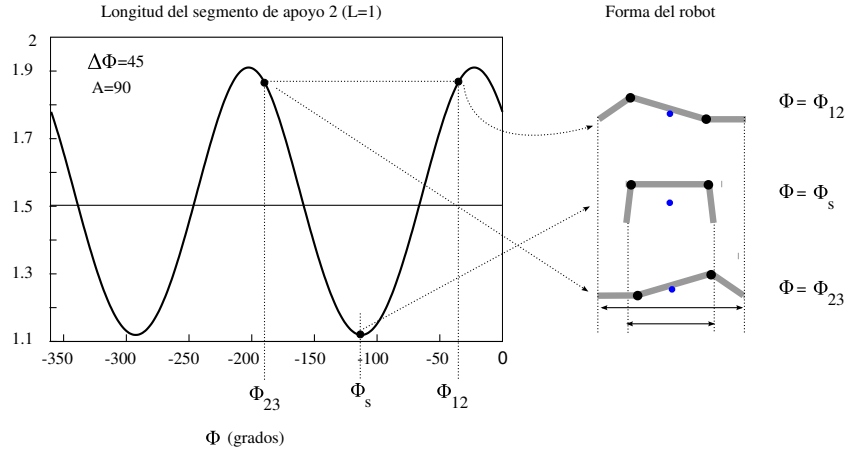


Figura 1.15: Variación del segmento de apoyo 2 con la fase para  $A=90$  y  $\Delta\phi = 45$

#### 1.6.3.4. Estudio del segmento de apoyo 2

Para demostrar las conclusiones anteriores hay que estudiar lo que le ocurre al segmento de apoyo 2 durante la etapa de propagación. Su longitud está dada por la ecuación 1.14. Si la expandimos empleando las expresiones de los ángulos de doblaje dadas en 1.2 Tenemos:

$$\|Sa_2\| = L \sqrt{\frac{3}{2} + \cos(A \sin(\phi)) + \cos(A \sin(\phi + \Delta\Phi)) + \frac{1}{2} \cos(A \sin(\phi) + A \sin(\phi + \Delta\Phi))} \quad (1.16)$$

Esta expresión es válida sólo para las fases comprendidas en el intervalo  $[\phi_{12}, \phi_{23}]$ . En la figura 1.15 se ha representado gráficamente su variación con  $\phi$  para  $A = 90$  y  $\Delta\phi = 45$ . Varía de manera periódica. Para  $\phi = \phi_{12}$  y  $\phi = \phi_{23}$  la longitud es máxima y para  $\phi = \phi_s$  es mínima. En la parte derecha de la figura se han dibujado la forma de los robots para los distintos puntos de trabajo. Esto permite visualizar gráficamente la variación de la distancia en los puntos de apoyo. El mínimo siempre está en  $\phi_s$  y los máximo en  $\phi_{12}$  y  $\phi_{23}$ .

En la figura 1.16 se muestra la gráfica restringida al intervalo  $[\phi_{12}, \phi_{23}]$  para los valores de  $\Delta\phi$  de 0, 45, 90 y 109, junto a las formas del robot en  $\phi_{12}$  y  $\phi_s$ , donde la longitud es máxima y mínima respectivamente. Para  $\Delta\phi = 0$  la variación es la máxima. Al aumentar su valor la variación disminuye hasta alcanzar el valor de  $\Delta\phi = 109$  donde es mínima. La longitud permanece constante con la fase.

Para obtener los valores de  $\Delta\phi$  que minimizan la variación del segmento de apoyo 2 aproximamos la expresión 1.16 por su desarrollo en serie de Fourier y nos quedamos con el primer armónico:

$$|Sa_2| \approx c_0 + c_2 e^{j2\phi} + c_{-2} e^{-j2\phi} = c_0 + 2|c_2| \cos(2\phi + \Delta\Phi)$$

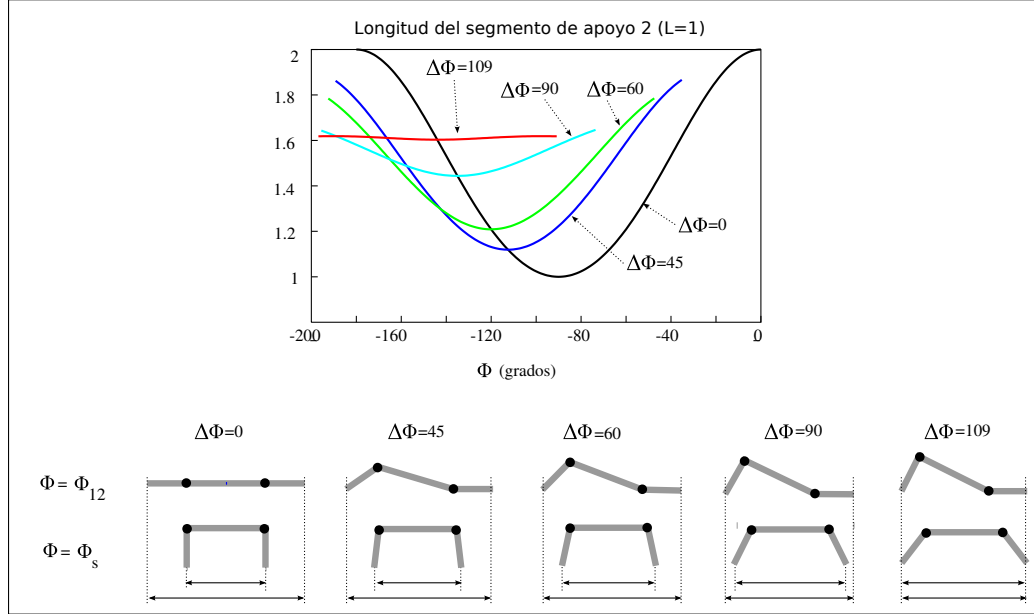


Figura 1.16: Representación gráfica de la variación de la longitud del  $Sa_2$  en función de  $\phi$  para diferentes valores de  $\Delta\phi$

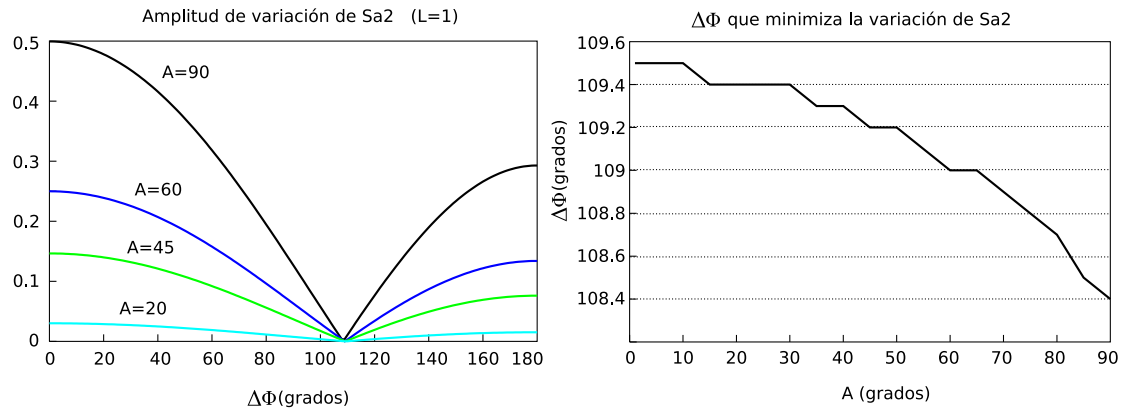


Figura 1.17: Izquierda: variación en la amplitud de oscilación de  $Sa_2$  con  $\Delta\phi$  para diferentes valores de  $A$ . Derecha: Variación del parámetro  $\Delta\phi$  que minimiza la amplitud de  $Sa_2$  en función de  $A$ .

No se pueden expresar los coeficientes de Fourier  $c_i$  de manera analítica por lo que los calculamos de forma numérica. El término  $2|c_2|$  representa la amplitud de la oscilación. En la figura 1.17 se ha representando este término en función de  $\Delta\phi$  y para diferentes valores de  $A$ . Se observa que:

- La variación disminuye con la disminución de  $A$ . Por tanto, el caso peor, donde la variación es máxima se produce para  $A = 90$ .
- La variación es mínima (tiende a cero) para una diferencia de fase en el entorno  $[108, 110]$ . Es en ese intervalo donde, con independencia de la amplitud  $A$  empleada, la longitud del segmento de apoyo permanece constante.

### 1.6.3.5. Ecuación del paso

Para estudiar cómo afectan los parámetros  $A$  y  $\Delta\phi$  al paso es necesario realizar un análisis de la dinámica, teniendo en cuenta los coeficientes de rozamiento con el suelo. Sin embargo, proponemos una ecuación que permite conocer el paso en el caso de el movimiento esté bien coordinado.

Para su cálculo asumiremos lo siguiente:

- Durante la contracción (etapa 1) la articulación 2 no desliza sobre el suelo.
- Durante la propagación los puntos de apoyo no deslizan
- Durante la expansión (etapa 3) la articulación 1 no desliza

Con esas asunciones **el paso del robot es igual a la contracción**. Es decir, que la contracción que se produce durante la etapa 1 y hace aparecer un mini-onda que luego se propaga es la que determina el paso del robot.

El valor de esta contracción se determina, por tanto, durante la etapa 1 y será igual a la longitud del segmento de apoyo 1 en la fase  $\phi = \phi_{12}$ . Particularizando la ecuación 1.13 obtenemos la expresión del paso:

$$\Delta y = |Sa_1|_{\phi=\phi_{12}} = L \sqrt{\frac{5}{4} + \cos(A \sin \phi_{12})} \quad (1.17)$$

### 1.6.3.6. Variación del paso con $A$ y $\Delta\phi$

En la figura 1.18 se representa el paso en función de  $A$  y  $\Delta\phi$ . Se observa que aumenta con  $A$ . En la zona central, donde  $\Delta\phi = [90, 110]$  su valor es alto. El valor máximo se encuentra en  $\Delta\phi = 107$  grados. Se verifica que el punto donde el paso es máximo está muy cercano al punto donde la coordinación es la mejor.

En la figura 1.19 se muestra el punto de trabajo  $(109, 90)$  y su variación con  $A$  y  $\Delta\phi$ .

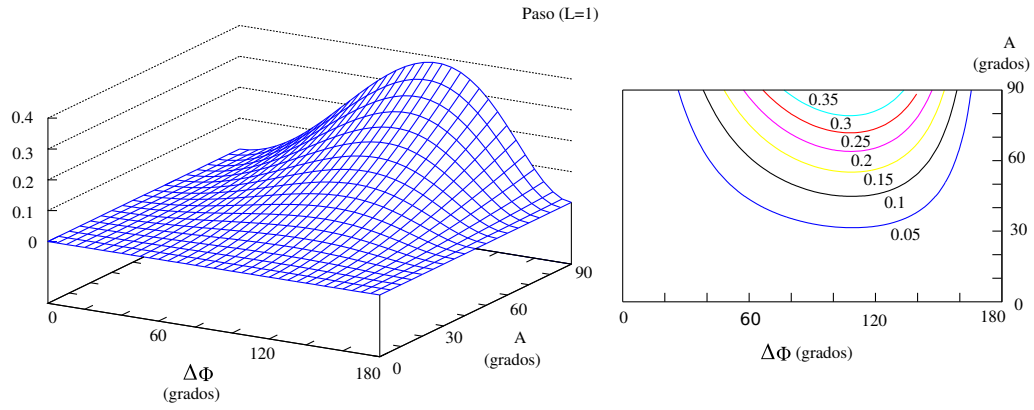


Figura 1.18: Representación gráfica del paso de la configuración PP en función de los parámetros  $A$  y  $\Delta\phi$

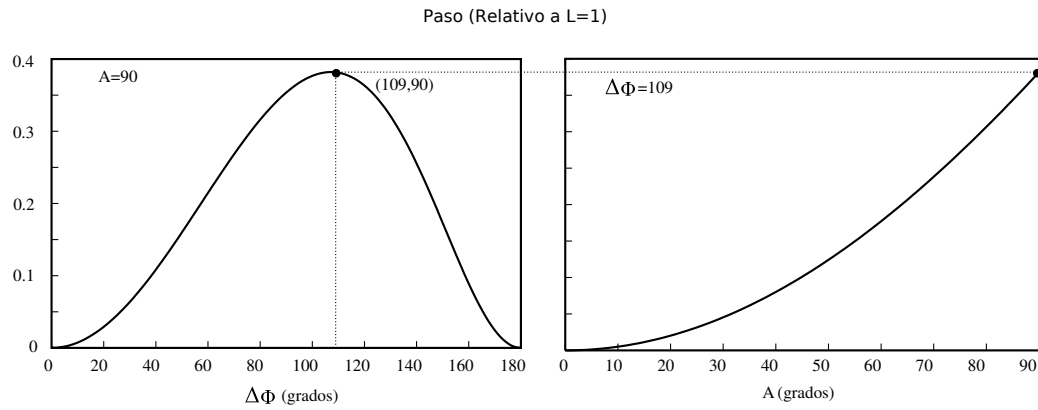
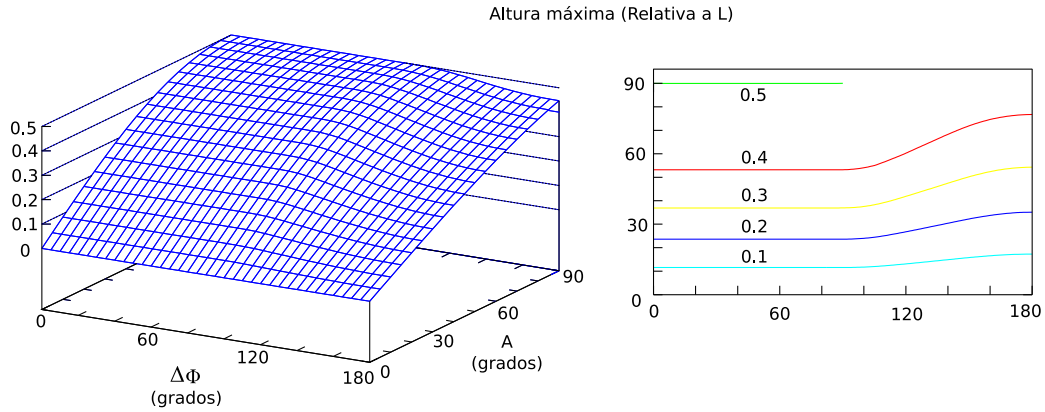


Figura 1.19: Punto de trabajo  $(109, 90)$  y su variación con  $A$  y  $\Delta\phi$

Figura 1.20: Altura de la configuración PP en función de  $A$  y  $\Delta\phi$ 

### 1.6.3.7. Sentido del movimiento

El sentido del movimiento se controla con la variación de  $\phi$  y el signo de  $\Delta\phi$ . Las combinaciones son:

- $\phi$  variando entre  $[0, -360]$ 
  - $\Delta\phi > 0$ , desplazamiento en sentido positivo del eje  $y$
  - $\Delta\phi < 0$ , desplazamiento en sentido negativo del eje  $y$
- $\phi$  variando entre  $[0, 360]$ 
  - $\Delta\phi < 0$ , desplazamiento en sentido positivo del eje  $y$
  - $\Delta\phi > 0$ , desplazamiento en sentido negativo del eje  $y$

## 1.6.4. Dimensiones

### 1.6.4.1. Altura

En la figura 1.20 se muestra la altura de la configuración PP y su variación con los parámetros  $A$  y  $\Delta\phi$  cuando la longitud de los segmentos es  $L = 1$ . La altura máxima  $L/2$  que se obtiene para  $A = 90$  y  $\Delta\phi = 0$ . La variación con  $\Delta\phi$  es pequeña. Para  $\Delta\phi < 90$  el valor se mantiene constante y disminuye para  $\Delta\phi > 90$ . La influencia de la amplitud es mayor. Se puede conseguir que el robot tenga desde altura 0 hasta la máxima.

En la figura 1.21 se muestra la variación de la altura del punto de trabajo  $(90, 90)$ .

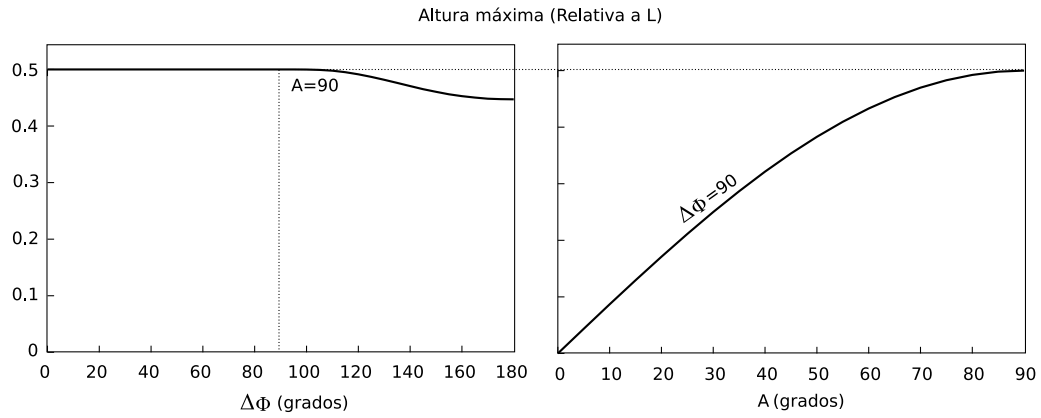


Figura 1.21: Izquierda: Variación de la altura con  $\Delta\phi$  para  $A = 90$ . Derecha: Variación de la altura con  $A$  para  $\Delta\phi=90$

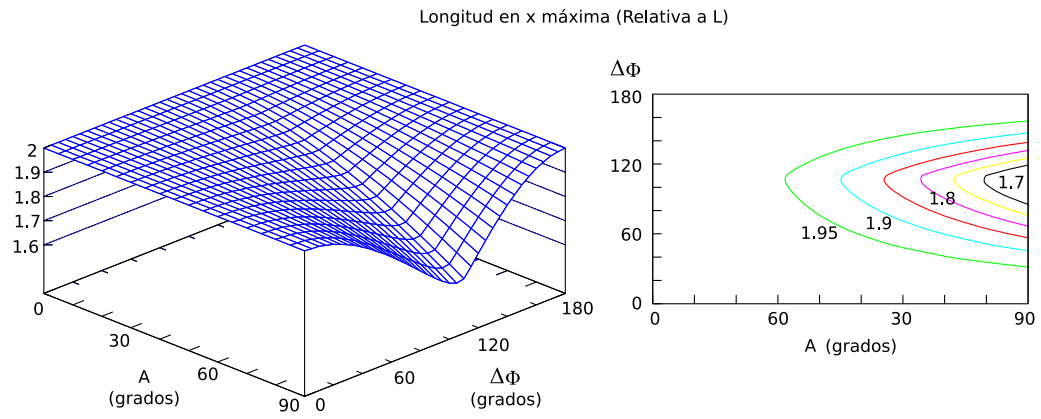


Figura 1.22: Anchura de la configuración PP en función de  $A$  y  $\Delta\phi$

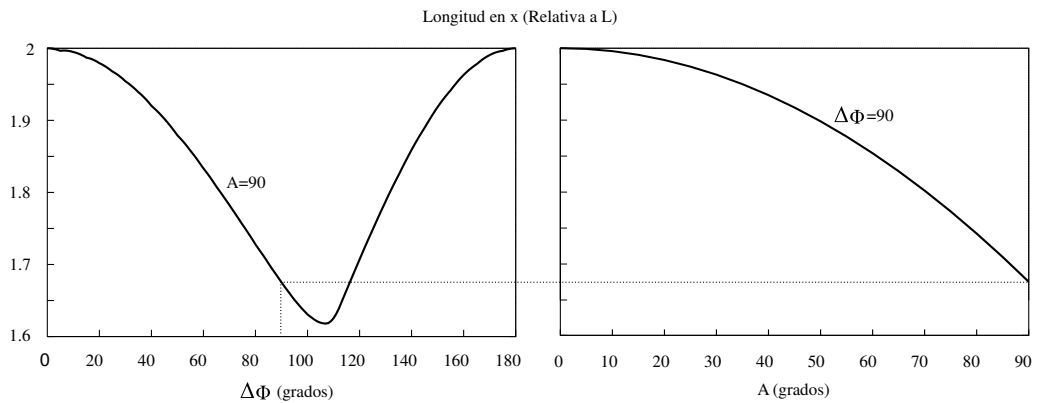


Figura 1.23: Variación de la anchura. Izquierda: con  $\Delta\phi$  para  $A = 90$ . Derecha: con  $A$  para  $\Delta\phi = 90$

### 1.6.4.2. Anchura

En la figura 1.22 se muestra la anchura y su variación con  $A$  y  $\Delta\phi$ . Disminuye al aumentar  $A$ . En la variación con  $\Delta\phi$  presenta los máximos en 0 y 180 y los mínimos están en el intervalo  $[107, 109]$ .

En la figura 1.23 se ha representado la variación de la anchura para el punto de trabajo  $(90, 90)$ .

### 1.6.5. Resumen

El estudio del movimiento de la configuración PP se ha dividido en **cuatro etapas**. En cada una de ellas se tiene unos puntos de apoyo diferentes. Se ha calculo el **ángulo de orientación**  $\phi_0$  para todas ellas, lo que permite obtener los vectores de posición de todas las articulaciones.

Para estudiar la coordinación se ha definido un **criterio de buena coordinación** basado en la distancia relativa entre los puntos de apoyo de la etapa 2, que es donde se propaga la mini-onda de movimiento. Si esta distancia es constante o pequeña, no existirán pérdidas en la propagación de la onda.

Se ha propuesto una **ecuación para calcular el paso**, basado en la premisa de que es igual a la contracción inicial. Su valor aumenta con la amplitud  $A$  y es máximo para una diferencia de fase de  $\Delta\phi = 107$  grados, muy cercano al intervalo donde la coordinación es la mejor.

Como conclusión de este movimiento, para el modelo alámbrico la mejor coordinación se produce en el intervalo  $[108, 110]$  y si la amplitud es de 90 grados, el paso será prácticamente igual al máximo.

## 1.7. Movimiento de rodar

### 1.7.1. Descripción del movimiento

El movimiento de rodar permite que la configuración PYP pueda rotar sus módulos alrededor de su eje corporal provocando un desplazamiento. En la solución encontrada las restricciones que se tienen que aplicar para que se produzca son:  $\Delta\phi_{vh} = 90$ ,  $\Delta\phi_v = 0$  y  $A_v = A_h = A$ . El movimiento tiene por tanto un único grado de libertad,  $A$ , que determina la forma del robot al rodar.

En la figura 1.24 se ha representado el modelo alámbrico de la configuración PYP rodando durante medio ciclo. Cada ciclo se divide en dos semiperiodos, comprendidos entre las fases  $\phi \in [0, 180]$  y  $\phi \in [180, 360]$ , en los que el movimiento es el mismo. En cada uno de ellos el robot rota 180 grados. Cada uno de estos semiperiodos se divide a su vez en **2 etapas**. En la figura 1.24 están representadas las dos etapas del primer semiperiodo, comprendidas entre las fases  $\phi \in [0, 90]$  y  $\phi \in [90, 180]$ . En cada una el robot rota 90 grados. En la figura 1.25 se ha representado la proyección en el plano

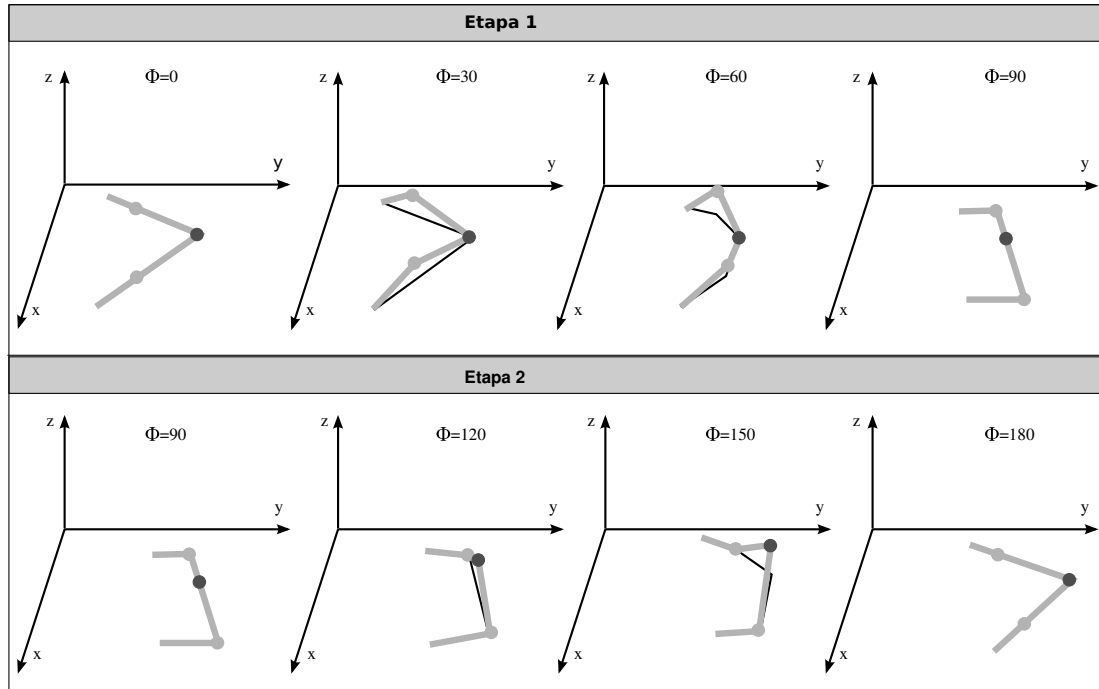


Figura 1.24: Movimiento de rodar del modelo alámbrico de la configuración PYP

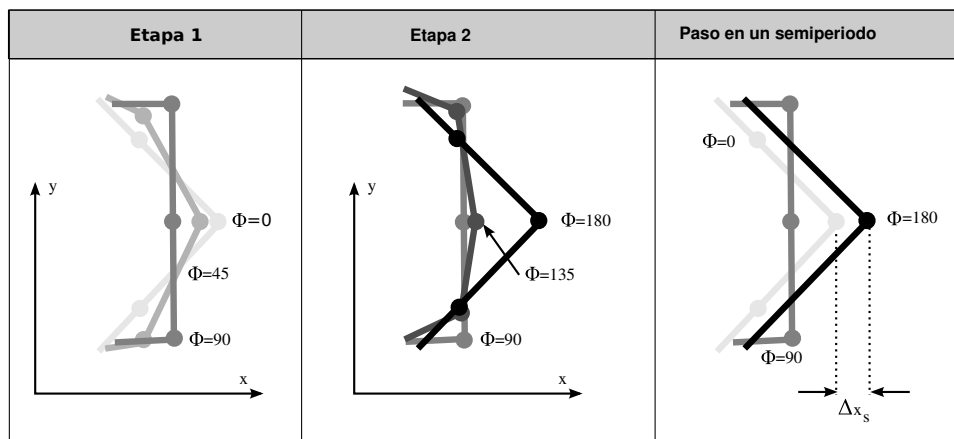


Figura 1.25: Vista superior del movimiento de rodar del modelo alámbrico de la configuración PYP

horizontal  $xy$  en el que se puede apreciar el paso  $\Delta x$  que da el robot al cabo de un ciclo. Se observa que los puntos de apoyo varían su posición respecto al suelo por lo que para encontrar la ecuación exacta del paso del modelo alámbrico habrá que estudiar la dinámica. En general su valor dependerá del tipo de superficie.

El mecanismo de rotación es diferente en las dos etapas. Al comienzo de la primera las articulaciones tienen las orientaciones de cabeceo-viraje-cabeceo (PYP) y al finalizar, como cada una de ellas ha rotado 90 grados, la nueva orientación será de viraje-cabeceo-viraje (YPY). La etapa 2 comienza con esta orientación y al rotar los 90 grados finaliza con la orientación PYP original. Se trata en realidad de un movimiento de rodar de dos configuraciones diferentes, la PYP y la YPY. Por ello, en su estudio distinguiremos entre los parámetros  $A_h$  y  $A_v$ . Las ecuaciones que emplearemos son:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_3 = A_v \sin \phi \\ \varphi_2 &= A_h \sin \left( \phi + \frac{\pi}{2} \right) = -A_h \cos \phi\end{aligned}\tag{1.18}$$

Esto nos permitirá determinar los valores correspondientes de  $A_v$  y  $A_h$  que hay que aplicar por separado en cada etapa para lograr el movimiento. En el apartado 1.7.8 lo aplicaremos al caso en el que  $A_v = A_h = A$  y con las dimensiones de los módulos Y1 diseñados en esta tesis.

En los restantes apartados estudiaremos el movimiento suponiendo que los módulos son hexaedros de dimensiones  $L \times W \times H$ . Sin embargo, esto no es un requisito necesario. El que el robot ruede es una característica intrínseca del modelo alámbrico. Una configuración mínima PYP con valores de anchura y altura nulos puede rodar. Cuando los módulos son hexaedros aparecen restricciones en las amplitudes de manera que no sólo se producirá el movimiento para valores de  $A_h$  y  $A_v$  mayores que un cierto valor mínimo. Esto se analiza con detalle en el apartado 1.7.5.

### 1.7.2. Modelo cinemático

Para el estudio del movimiento emplearemos el modelo cinemático mostrado en la figura 1.26. En vez de utilizar el modelo general de la configuración PYP mostrado en el apartado 1.4.3.2, aprovechamos la simetría de este movimiento para simplificar las ecuaciones. Tomaremos como origen la articulación central (la 2). Los sistemas de referencia empleados son el  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ . Los sistemas  $R_2$  y  $R_3$  están situados sobre las articulaciones 2 y 3 respectivamente, igual que en el caso general.  $R_1$  se encuentra también sobre la articulación 2. Su eje  $x_1$  se encuentra orientado en la dirección del eje de simetría.  $R_2$  está rotado un ángulo  $\theta_2$  respecto a  $R_1$ . Por la simetría, este ángulo es igual a  $\varphi_2/2$ .

El sistema de referencia  $R_0$  está también situado sobre la articulación 2 y su plano  $x_0y_0$  es paralelo al suelo. Lo utilizaremos como referencia para conocer el ángulo  $\theta_1$  que ha rotado el robot respecto al eje  $y_0$ .

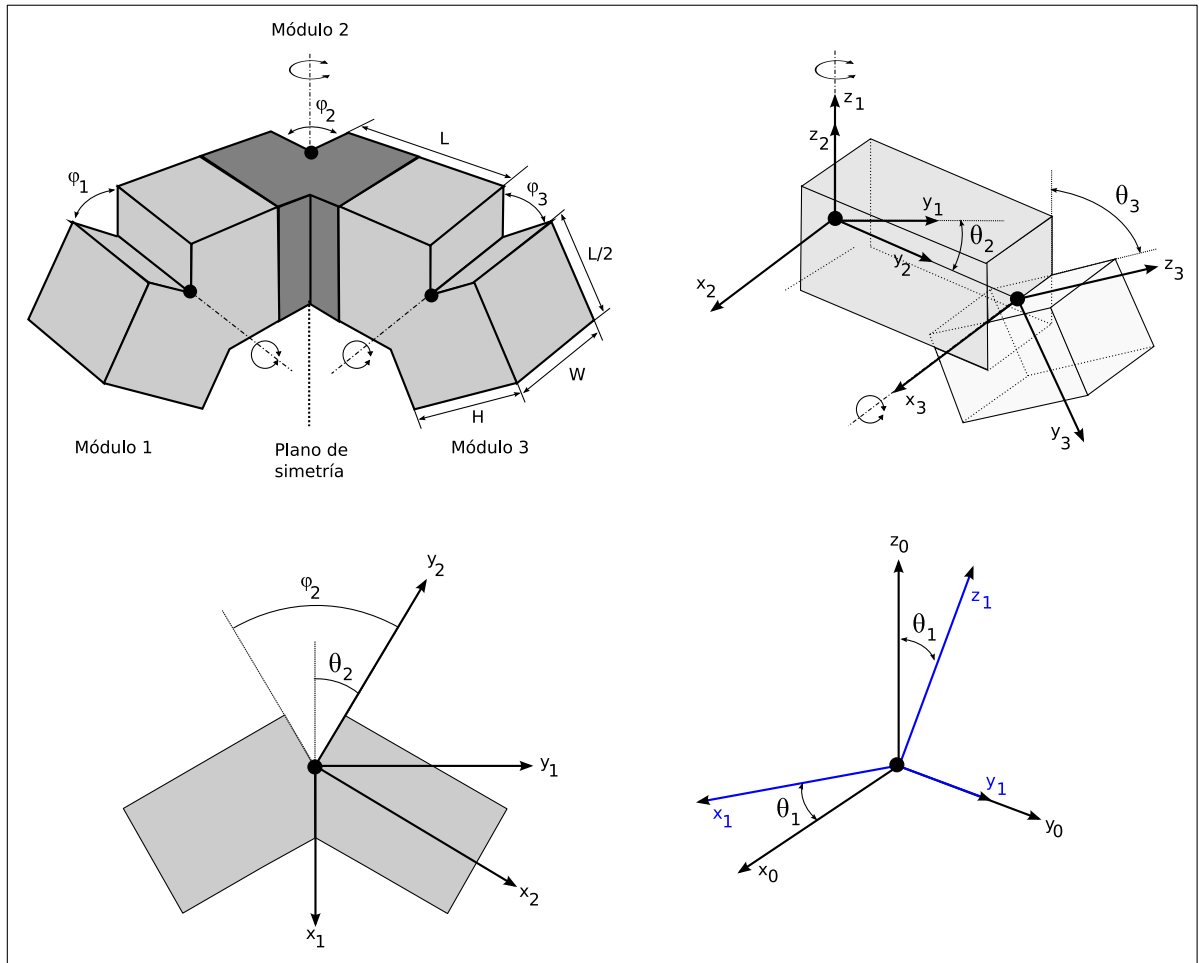


Figura 1.26: Modelo cinemático empleado para el estudio del movimiento de rodar de la configuración PYP

Por tanto, el movimiento lo describimos mediante tres ángulos  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$ . Por el criterio de signos empleados, tenemos que:

$$\begin{aligned}\theta_2 &= -\frac{\varphi_2}{2} \\ \theta_3 &= -\varphi_3\end{aligned}\tag{1.19}$$

El ángulo de rotación del robot,  $\theta_1$  se obtiene como una función de  $\theta_2$  y  $\theta_3$  y su expresión depende de la etapa del movimiento. Se calcula en el apartado 1.7.3.

Las transformadas homogéneas que definen el modelo, utilizando la misma notación definida en el apartado 1.4.3.2, son:

- Transformada entre los sistemas  $R_3$  y  $R_2$ : Rotación de un ángulo  $\theta_3$  alrededor de  $x_3$  y traslación de una distancia  $L$  a lo largo de  $y_2$ .

$$H_2^3 = T_y(L) R_x(\theta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & L \\ 0 & \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Transformada entre los sistemas  $R_2$  y  $R_1$ : Rotación de un ángulo  $\theta_2$  alrededor de  $z_2$

$$H_1^2 = R_z(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Transformada entre los sistemas  $R_1$  y  $R_0$ : Rotación de un ángulo  $\theta_1$  alrededor del eje  $y_1$

$$H_0^1 = R_y(\theta_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Rotación de -90 grados respecto al eje  $x_0$  para definir el estado inicial del sistema de referencia  $R_0$  al comienzo de la etapa 2:

$$H_{-90} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 1.7.3. Ángulo de rotación $\theta_1$

#### 1.7.3.1. Etapa 1

El ángulo de rotación  $\theta_1$  está dado por la siguiente expresión:

$$\theta_1 = \arctan \left( -\frac{\sin(A_v \sin \phi)}{(2 + \cos(A_v \sin \phi)) \sin\left(\frac{A_h}{2} \cos \phi\right)} \right) \quad (1.20)$$

Al comienzo de la etapa 1, cuando  $\phi = 0$ , el robot no ha rotado y se obtiene que  $\theta_1 = 0$ . Al finalizar la etapa ( $\phi = 90$ ) el robot ha rotado un ángulo  $\theta_1 = -90$ .

#### Demostración

Durante la etapa 1, los puntos de apoyo son los dos extremos (puntos  $P_0$  y  $P_4$ ) y la articulación central (Punto  $P_2$ ) (ver figura 1.24). Para el cálculo de  $\theta_1$  imponemos la condición de que  $P_4$  esté en contacto con el suelo y por tanto su coordenada  $z$  referida al sistema  $R_0$  debe ser 0 para todas las fases. Es decir, que se cumpla que:

$$\vec{r}_4 \cdot \hat{z}_0 = 0$$

Aplicando la ecuación 1.3 queda:

$$\left( H_0^1 H_1^2 H_2^3 \vec{r}_3^4 \right) \cdot \hat{z}_0 = 0$$

Sustituyendo  $\vec{r}_3^4$  por su valor (ecuación 1.5), operando y despejando  $\theta_1$  se obtiene la expresión (Los detalles se encuentran en el apéndice ??):

$$\tan \theta_1 = -\frac{\sin \theta_3}{(2 + \cos \theta_3) \sin \theta_2}$$

Poniendo  $\theta_2$  y  $\theta_3$  en función de los ángulos de doblaje (ecuación 1.19):

$$\tan \theta_1 = -\frac{\sin(A_v \sin \phi)}{(2 + \cos(A_v \sin \phi)) \sin\left(\frac{A_h}{2} \cos \phi\right)}$$

Sustituyendo los ángulos de doblaje por su valores para el movimiento de rodar (ec. 1.18) se obtiene la expresión final 1.20.

### 1.7.3.2. Etapa 2

El ángulo de rotación  $\theta_1$  está dado por la siguiente expresión:

$$\theta_1 = -90 + \arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{A_h}{2} \cos \phi\right)}{\tan(A_v \sin \phi)}\right) \quad (1.21)$$

La etapa 2 comienza en la fase  $\phi = 90$ , en la que la el robot ha rotado un ángulo de  $\theta_1 = -90$ . Finaliza en  $\phi = 180$ , obteniéndose un valor de  $\theta_1 = -180$ .

### Demostración

En la etapa 2 los segmentos izquierdo y derecho permanecen en contacto con el suelo, apoyados sobre el plano  $z_0 = 0$ . Para el cálculo de  $\theta_1$  impondremos esa condición al segmento derecho. Se debe cumplir que:

$$\vec{d}_4 \cdot \hat{z}_0 = 0$$

Donde  $\vec{d}_4$  representa la orientación del segmento derecho. Si este vector lo referimos al sistema  $R_3$  y lo denotamos por  $\vec{d}_3^4$ , la expresión queda:

$$\left(H_{-90}H_0^1H_1^2H_2^3\vec{d}_3^4\right) \cdot \hat{z}_0 = 0 \quad (1.22)$$

El segmento derecho es el que va desde la articulación 2 hasta el punto  $P_4$ . Su expresión referida al sistema  $R_3$  es por tanto:

$$\vec{d}_3^4 = \frac{\hat{L}}{2} y_3$$

Sustituyéndolo en la ecuación 1.22, operando y despejando obtenemos la expresión de  $\theta_1$  (los detalles están en el apéndice ??):

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta_2 \cos \theta_3}{\sin \theta_3}$$

Expresando el ángulo  $\theta_1$  tomando como referencia la etapa 1:

$$\theta_1 = -90 - \arctan \left( \frac{\sin \theta_2}{\tan \theta_3} \right)$$

Poniendo  $\theta_2$  y  $\theta_3$  en función de los ángulos de doblaje (ecuación 1.19):

$$\theta_1 = -90 - \arctan \left( \frac{\sin \frac{\varphi_2}{2}}{\tan \varphi_3} \right)$$

Sustituyendo los ángulos de doblaje por su valores para el movimiento de rodar (ec. 1.18) se obtiene la expresión final ??.

## 1.7.4. Funciones de estabilidad

### 1.7.4.1. Planteamiento

El modelo alámbrico de la configuración PYP siempre rueda, con independencia de la longitud de los módulos. Sin embargo, en el modelo hexaédrico este movimiento no se realiza siempre. Depende de la posición del centro de gravedad que es función de los parámetros geométricos del robot y de sus ángulos de doblaje. En este apartado estudiaremos las condiciones que se deben cumplir para que se produzca el movimiento.

En la figura 1.27 se muestran los dos movimientos posibles: rodar y desplazamiento lateral para cada una de las etapas. El que se realice uno u otro depende de la posición del punto crítico  $C$  con respecto al centro de masas ( $C_m$ ). Si  $C$  tiene una abscisa menor que  $C_m$  entonces el polígono de apoyo es tal

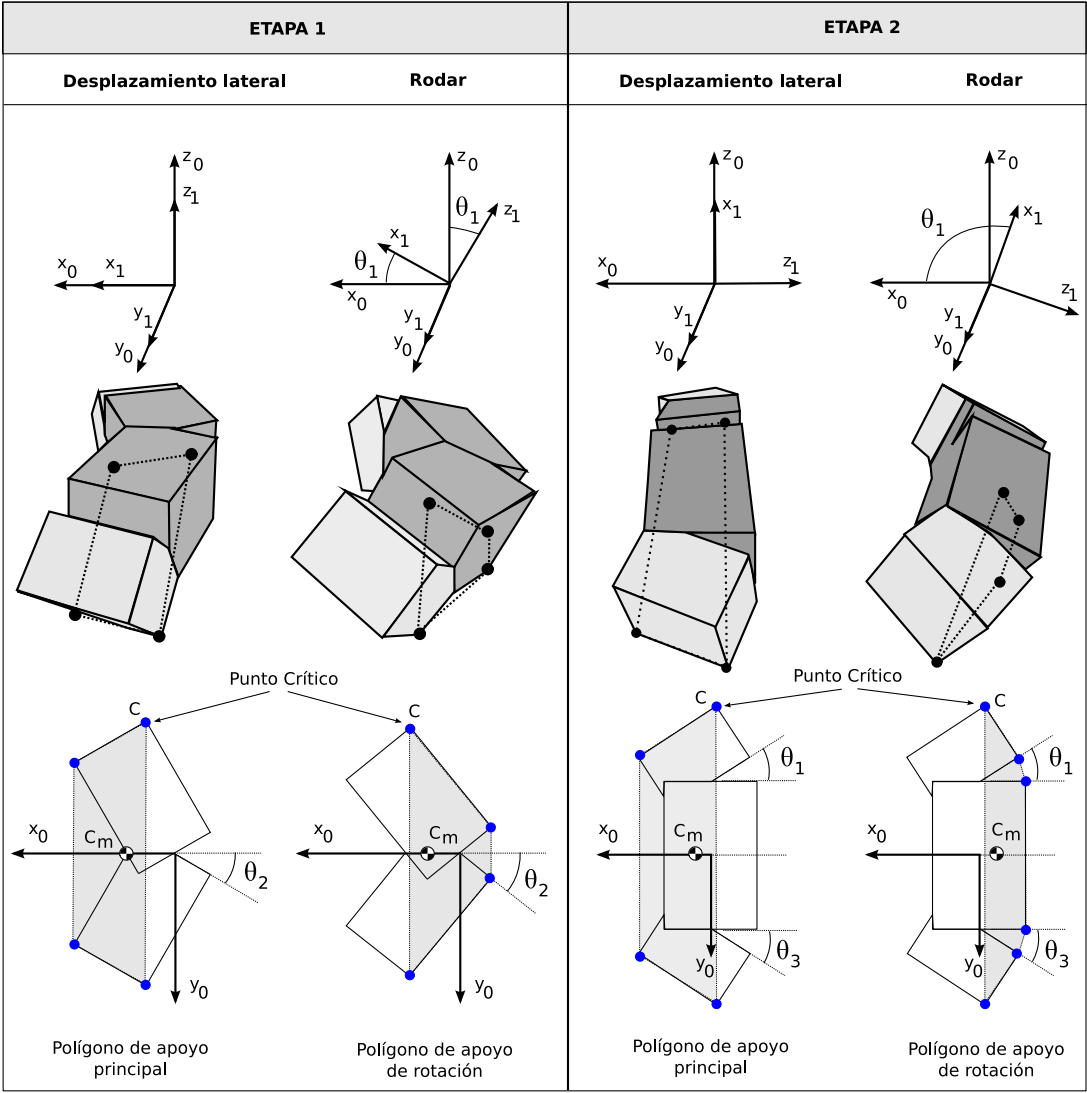


Figura 1.27: Movimientos de rodar y desplazamiento lateral de la configuración PYP en función de la posición del centro de gravedad

que la orientación del robot es paralela al plano  $x_0y_0$  ( $\theta_1 = 0$  en la etapa 1 o  $\theta_1 = 90$  en la etapa 2). Lo denominamos **polígono de apoyo principal**.

Por el contrario, si la abscisa de  $C$  es mayor que la de  $C_m$ , **el polígono de apoyo lo denominamos de rotación** y la orientación del robot cambia. Ahora  $\theta_1 > 0$  en la etapa 1 y  $\theta_1 > 90$  en la etapa 2.

#### 1.7.4.2. Expresiones

Definimos la función de estabilidad como la diferencia entre la abscisa del punto crítico  $C$  y la del centro de masas, referidas al sistema de referencia  $R_0$ . Su expresión general es:

$$e(\phi) = \vec{C}_0 \cdot \hat{x}_0 - \vec{C}_{m_0} \cdot \hat{x}_0 \quad (1.23)$$

Particularizando para las dos etapas, se obtienen las expresiones finales:

##### ■ Función de estabilidad para la etapa 1

$$e(\phi) = \left( \frac{W}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} - \sin \frac{\varphi_2}{2} \left( \frac{5}{12} L \cos \varphi_3 - \frac{H}{2} \sin \varphi_3 + \frac{L}{3} \right) \right) \cos \theta_1 + \left( H \cos \varphi_3 + \frac{5}{6} L \sin \varphi_3 \right) \frac{\sin \theta_1}{2} \quad (1.24)$$

##### ■ Función de estabilidad para la etapa 2

$$e(\phi) = \left( \frac{W}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} - \sin \frac{\varphi_2}{2} \left( \frac{5}{12} L \cos \varphi_3 + \frac{H}{2} \sin \varphi_3 + \frac{L}{3} \right) \right) \cos \theta_1 - \left( H \cos \varphi_3 - \frac{5}{6} L \sin \varphi_3 \right) \frac{\sin \theta_1}{2} \quad (1.25)$$

#### 1.7.4.3. Deducciones

##### Etapas 1

Partimos de la ecuación 1.23 y sustituimos en ella los valores de  $\vec{C}_0$  y  $\vec{C}_{m_0}$  para la etapa 1. En la figura 1.28 se muestran la situación del punto crítico referido al sistema  $R_3$  y la notación empleada.

El centro de masas lo calculamos a partir de los centros de masas de cada uno de los dos cuerpos. Sus vectores de posición los denotamos por  $\vec{E}_0$  y  $\vec{D}_0$ , referidos al sistema  $R_0$ . El robot lo podemos ver como constituido por tres bloques iguales de masa  $M$ . Aplicando la fórmula del centro de masas, suponiendo que la masa está uniformemente distribuida:

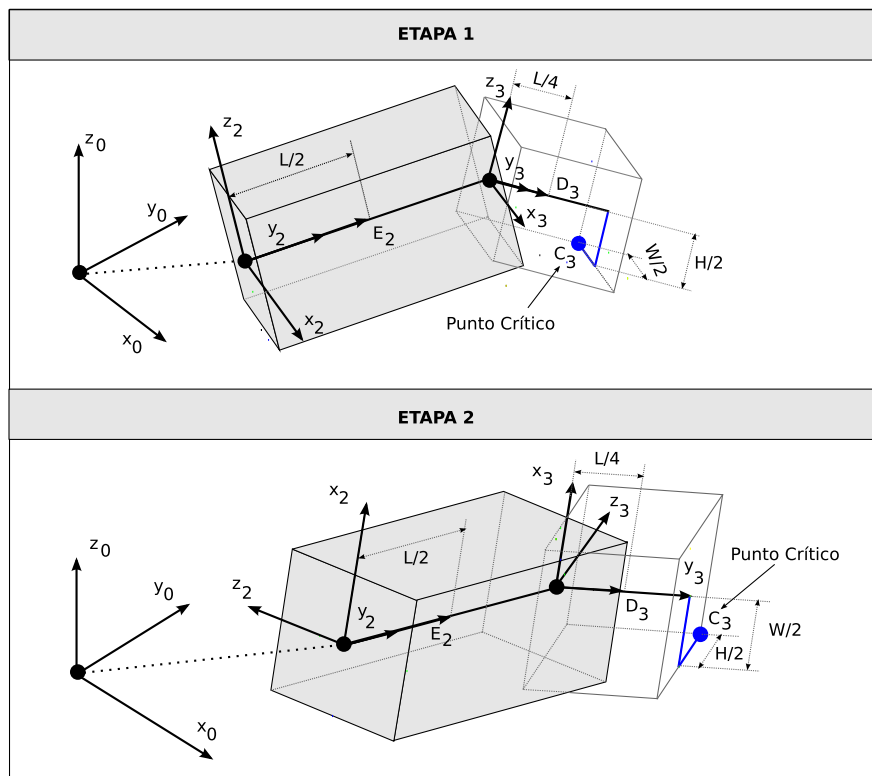


Figura 1.28: Punto crítico C en las dos etapas

$$\overrightarrow{Cm_0} = \frac{1}{M_T} \sum_{i=1}^n M_i \overrightarrow{r_i} = \frac{1}{3M} (2M\overrightarrow{E_0} + M\overrightarrow{D_0}) = \frac{1}{3} (2\overrightarrow{E_0} + \overrightarrow{D_0}) \quad (1.26)$$

Los vectores  $\overrightarrow{E_0}$  y  $\overrightarrow{D_0}$  expresados con respecto a los sistemas de referencia  $R_2$  y  $R_3$  son:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E_0} &= H_0^1 H_1^2 \overrightarrow{E_2} \\ \overrightarrow{D_0} &= H_0^1 H_1^2 H_2^3 \overrightarrow{D_3} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación 1.26 obtenemos:

$$\overrightarrow{Cm_0} = \frac{1}{3} (2H_0^1 H_1^2 \overrightarrow{E_2} + H_0^1 H_1^2 H_2^3 \overrightarrow{D_3}) = \frac{1}{3} H_0^1 H_1^2 (\overrightarrow{E_2} + H_2^3 \overrightarrow{D_3}) \quad (1.27)$$

El punto crítico  $\overrightarrow{C_0}$  en función del sistema de referencia  $R_3$  es:

$$\overrightarrow{C_0} = H_0^1 H_1^2 H_2^3 \overrightarrow{C_3} \quad (1.28)$$

Sustituyendo 1.27 y 1.26 en 1.23:

$$e(\phi) = \overrightarrow{C_0} \cdot \hat{x}_0 - \overrightarrow{Cm_0} \cdot \hat{x}_0 = \left( H_0^1 H_1^2 H_2^3 \overrightarrow{C_3} - \frac{1}{3} H_0^1 H_1^2 (\overrightarrow{E_2} + H_2^3 \overrightarrow{D_3}) \right) \cdot \hat{x}_0$$

Operando llegamos a:

$$e(\phi) = \left( H_0^1 H_1^2 \left( \frac{2}{3} \overrightarrow{E_2} + H_2^3 \left( \frac{\overrightarrow{D_3}}{3} - \overrightarrow{C_3} \right) \right) \right) \cdot \hat{x}_0 \quad (1.29)$$

Los valores de  $E_2$ ,  $D_3$  y  $C_3$  se obtiene de la figura 1.28:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{C_3} &= \frac{L}{2} \hat{y}_3 - \frac{W}{2} \hat{x}_3 - \frac{H}{2} \hat{z}_3 \\ \overrightarrow{E_2} &= \frac{L}{2} \hat{y}_2 \\ \overrightarrow{D_3} &= \frac{L}{4} \hat{y}_3 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Sustituyendo 1.30 en 1.29:

$$e(\phi) = \left( \frac{W}{2} \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \left( \frac{5}{12} L \cos \theta_3 + \frac{H}{2} \sin \theta_3 + \frac{L}{3} \right) \right) \cos \theta_1 + \left( H \cos \theta_3 - \frac{5}{6} L \sin \theta_3 \right) \frac{\sin \theta_1}{2}$$

Poniéndola en función de los ángulos de doblaje (ecuaciones 1.19) se llega a la expresión final 1.24.

## Etapas 2

El razonamiento es el mismo que para la etapa 1, lo único que cambian son las coordenadas del punto crítico que ahora son (ver figura 1.28):

$$\vec{C}_3 = \frac{L}{2}\hat{y}_3 - \frac{W}{2}\hat{x}_3 + \frac{H}{2}\hat{z}_3$$

Sustituyendo en la ecuación 1.29 se obtiene:

$$e(\phi) = \left( \frac{W}{2} \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \left( \frac{5}{12}L \cos \theta_3 - \frac{H}{2} \sin \theta_3 + \frac{L}{3} \right) \right) \cos \theta_1 - \left( H \cos \theta_3 + \frac{5}{6}L \sin \theta_3 \right) \frac{\sin \theta_1}{2}$$

Poniéndola en función de los ángulos de doblaje (ecuaciones 1.19) se llega a la expresión final 1.25.

### 1.7.5. Condiciones para rodar

#### 1.7.5.1. Condiciones generales

A continuación expresamos las condiciones generales para que se realicen los dos movimientos:

**Condición de desplazamiento lateral.** *Si para la fase inicial  $\phi = 0$  se verifica que  $e(0) > 0$ , entonces el movimiento será de desplazamiento lateral para todas las fases.*

El desplazamiento lateral sólo se puede realizar cuando el robot está en la etapa 1 (en la que la configuración es PYP), por ello esta condición sólo es válida en esta etapa. Cuando el polígono de apoyo es el principal, la función de estabilidad sólo depende del ángulo de doblaje de la articulación central  $\phi_2$ . Las articulaciones  $\phi_1$  y  $\phi_3$  sólo hacen que el centro de gravedad sube o baje, pero no modifican su abscisa. Además, cuando  $\phi = 0$ , el valor absoluto del ángulo de doblaje  $\phi_2$  es máximo (es igual a  $A_h$  por la ecuación 1.18). Este es el caso peor, donde la abscisa del centro de gravedad está más próxima a la del punto crítico. Para valores de  $\phi$  mayores de  $\phi_0$ , la distancia aumentará. Por tanto, si se garantiza que para  $\phi = \phi_0$  el polígono de apoyo es el principal, lo seguirá siendo para todas las fases.

**Condición de Rodar:** *Para que el robot ruede se deben verificar las siguientes dos condiciones:*

1. *Que inicialmente el polígono de apoyo sea el de rotación:  $e(\phi_0) < 0$*

2. *Que la proyección del centro de masas permanezca dentro del polígono de rotación para todas las fases. Es decir que  $e(\phi) < 0$  para toda  $\phi$ . Esta condición se verifica si  $\max(e(\phi)) < 0$ .*

La condición 1 no garantiza que se realice el movimiento de rodar. Implica que inicialmente el polígono de apoyo será el de rotación, pero al variar la fase puede ocurrir que el polígono de apoyo pase a ser el principal cambiando la orientación del robot. Si esto ocurre, el movimiento que aparece es inestable. El robot cambia su orientación constantemente por lo que no es capaz ni de desplazarse lateralmente ni de rodar.

Analizaremos estas condiciones en las dos etapas.

### 1.7.5.2. Condiciones Etapa 1

- **Condición de desplazamiento lateral:** Si  $A_h < A_{hL}$ , el movimiento será un desplazamiento lateral, donde  $A_{hL}$  está dado por:

$$A_{hL} = 2 \arctan\left(\frac{2}{3} \frac{W}{L}\right) \quad (1.31)$$

- **Condición para rodar:** Si se cumple que  $A_h > A_{hL}$  y  $e_{\max}(A_v, A_h, L, W, H) < 0$  el movimiento será de rodar, donde  $e_{\max}$  es el valor máximo de la función de estabilidad:  $e_{\max} = \max(e(\phi))$ .

La expresión de  $e_{\max}$  se puede resolver numéricamente. Dado un valor  $A_h > A_{hL}$ , se realizan iteraciones en los valores de  $A_v$  (entre 0 y 90) para encontrar el punto donde se cumple la condición  $e_{\max} = 0$ . En el apartado 1.7.8 se ha resuelto para el modelo hexaédrico con las dimensiones de los módulos YI.

### Demostración

Para la deducción de la ecuación 1.31 se impone la restricción  $e(0) = 0$ , donde  $e(\phi)$  es la función de estabilidad de la etapa 1 (ecuación 1.24). Operando se obtiene:

$$e(0) = -\frac{3}{4}L \sin \frac{\varphi_2}{2} + \frac{W}{2} \cos \varphi_2 = 0$$

Despejando  $\varphi_2$ :

$$\tan \frac{\varphi_2}{2} = \frac{2}{3} \frac{W}{L} \Rightarrow \varphi_2 = 2 \arctan \left( \frac{2}{3} \frac{W}{L} \right)$$

El ángulo de doblaje  $\varphi_2$  en la fase  $\phi = 0$  es igual a  $-A_h$  (ec. 1.18). Tomando el valor absoluto se obtiene la expresión final 1.31.

### 1.7.5.3. Condiciones Etapa 2

- Condición para rodar. Si se cumple que  $A_v > A_{vL}$  y  $e_{\max}(A_v, A_h, L, W, H) < 0$  el movimiento será de rodar.  $A_{vL}$  está dado por la expresión:

$$A_{vL} = \arctan \left( \frac{6}{5} \frac{H}{L} \right) \quad (1.32)$$

### Demostración

Imponiendo la restricción  $e(90) = 0$ , donde  $e(\phi)$  es la función de estabilidad de la etapa 2 (ecuación 1.25). Operando se obtiene:

$$H \cos \varphi_3 - \frac{5}{6} L \sin \varphi_3 = 0$$

Despejando  $\varphi_3$ :

$$\tan \varphi_3 = \frac{6}{5} \frac{H}{L} \Rightarrow \varphi_3 = \arctan \left( \frac{6}{5} \frac{H}{L} \right)$$

El ángulo de doblaje  $\varphi_3$  en la fase  $\phi = 90$  es igual a  $A_v$  (ec. 1.18), obteniendo la expresión final 1.32.

### 1.7.6. Regiones de movimiento

Al emplear módulos hexaédricos de dimensiones  $L \times W \times H$ , el movimiento de rodar sólo se realiza para unos valores de las amplitudes verticales y horizontales que forman la región de movimiento. En la figura 1.29 se muestra el aspecto genérico de esta región. En los puntos interiores a esa región el robot rodará.

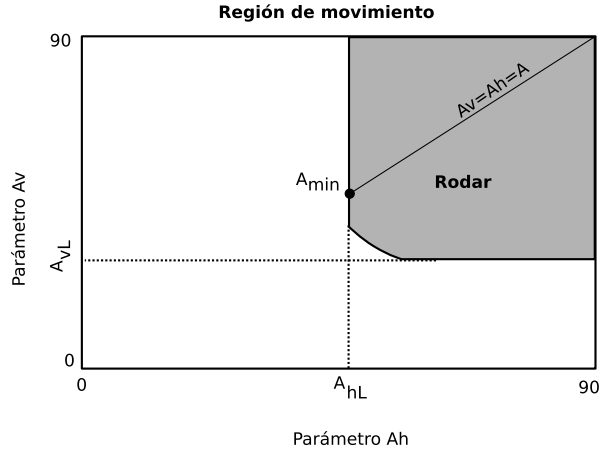


Figura 1.29: Región de movimiento para que la configuración PYP rueda, en función de los parámetros  $A_h$  y  $A_v$

Las soluciones encontradas en el movimiento de rodar tienen amplitudes iguales. Si se hace que  $A_v = A_h = A$ , definimos la amplitud mínima,  $A_{min}$ , como:

$$A_{min} = \max \{A_{vL}, A_{hL}\}$$

Así, la condición de rodar se expresa de esta manera:

**Condición para rodar** Si  $A > A_{min}$  entonces el robot rueda.

#### 1.7.6.1. Obtención de la región

Estudiaremos cómo se ha obtenido la región de movimiento. Para ello analizaremos la región en las etapas 1 y 2. Para que el movimiento de rodar se realice de una manera continua, el punto de trabajo  $(A_h, A_v)$  empleado tiene que pertenecer a la región de rodar de las dos etapas. La región solución la obtendremos como la intersección de las regiones de la etapa 1 y 2. En la figura 1.30 se muestran las regiones por separado.

##### Etapas 1

Si  $A_h < A_{hL}$  el movimiento será un desplazamiento lateral, con independencia del valor de  $A_v$ . Cuando  $A_h > A_{hL}$ , existen dos subregiones dependiendo del valor de  $A_v$ . En una de ellas, el polígono de apoyo es siempre el de rodar y por tanto el robot rodará. En la otra, se alternarán los dos polígonos por lo que será una zona inestable. La curva que separa ambas subregiones se calcula numéricamente a partir de la condición  $emax = 0$ , donde  $emax$  es el valor máximo de la función de estabilidad de la etapa 1.

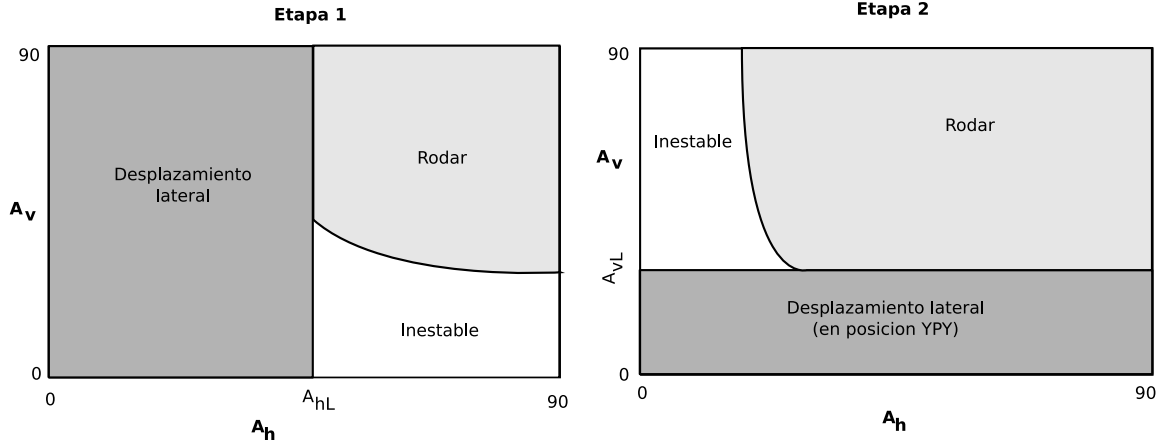


Figura 1.30: Regiones de movimiento en las etapas 1 y 2

**Etapla 2**

Para la etapa 2 sucede lo mismo. Cuando  $A_v < A_{vL}$  el movimiento será un desplazamiento lateral, pero en posición YPY. Cuando  $A_v > A_{vL}$ , tenemos nuevamente dos subregiones, una en la que se produce el movimiento de rodar y otra en la que los polígonos de apoyo se alternan.

**1.7.7. Paso**

Suponiendo que se está empleando un modelo hexaédrico de dimensiones genéricas  $L \times W \times H$  y que los valores de las amplitudes  $A_v$  y  $A_h$  están próximos a la frontera de la región de movimiento, el paso dado en cada etapa se puede aproximar por los parámetros  $W$  ó  $H$ . Así:

- Paso en la etapa 1:  $\Delta x_1 \approx W$
- Paso en la etapa 2:  $\Delta x_2 \approx H$

Por tanto, en estas condiciones, el paso total está dado por:

$$\Delta x \approx 2(W + H)$$

Si la sección del módulo es cuadrada ( $H = W$ ), entonces el paso queda:

$$\Delta x \simeq 4H \quad (1.33)$$

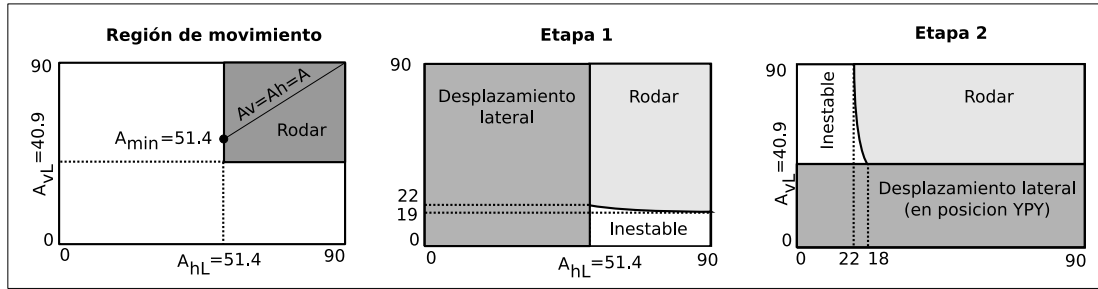


Figura 1.31: Regiones de movimiento para el caso de estudio: Etapa 1, 2 y la total

Parámetro	Descripción	Valor
$H$	Altura del módulo	5.2 cm
$W$	Anchura del módulo	5.2 cm
$L$	Longitud del módulo	7.2 cm
$A_{hL}$	Amplitud horizontal límite	51.4 grados
$A_{vL}$	Amplitud vertical límite	40.9 grados
$A_{min}$	Amplitud mínima para rodar	51.4 grados
$\Delta x$	Paso	20.8 cm

Cuadro 1.2: Parámetros para el caso de estudio

### 1.7.8. Caso de estudio

En este apartado se obtendrán valores numéricos cuando las dimensiones de los módulos se corresponden con la de los módulos Y1, empleado en los experimentos. En la figura 1.31 se ha representado las regiones de movimiento y en la tabla 1.2 se resumen los valores de todos sus parámetros.

Los valores de  $A_{vL}$  y  $A_{hL}$  se calculan a partir de las ecuaciones 1.32 y 1.31 respectivamente. El valor de  $A_{min}$  será el máximo de los dos, que es 51.4. Las regiones se han obtenido resolviendo numéricamente las ecuaciones implícitas  $emax(A_v, A_h) = 0$  de ambas etapas.

Finalmente, a partir de la ecuación 1.33 se obtiene el paso aproximado, cuando la amplitud  $A$  mayor que  $A_{min}$  pero está cercano a ella.

### 1.7.9. Resumen

El estudio del movimiento de rodar se divide en **dos etapas**. En la primera el robot pasa de la configuración PYP a la YPY y en la segunda de la YPY a la PYP. Para cada una de ellas se ha calculado el **ángulo de rotación**  $\theta_i$  en función de la fase y la **función de estabilidad** que determina cuál es el polígono de apoyo. A partir de esta función se han enunciado **las condiciones** que se deben cumplir para que se realice bien un movimiento de desplazamiento lateral o bien uno de rodar. Se han obtenido las expresiones de las amplitudes vertical y horizontal límites que diferencian estos modos

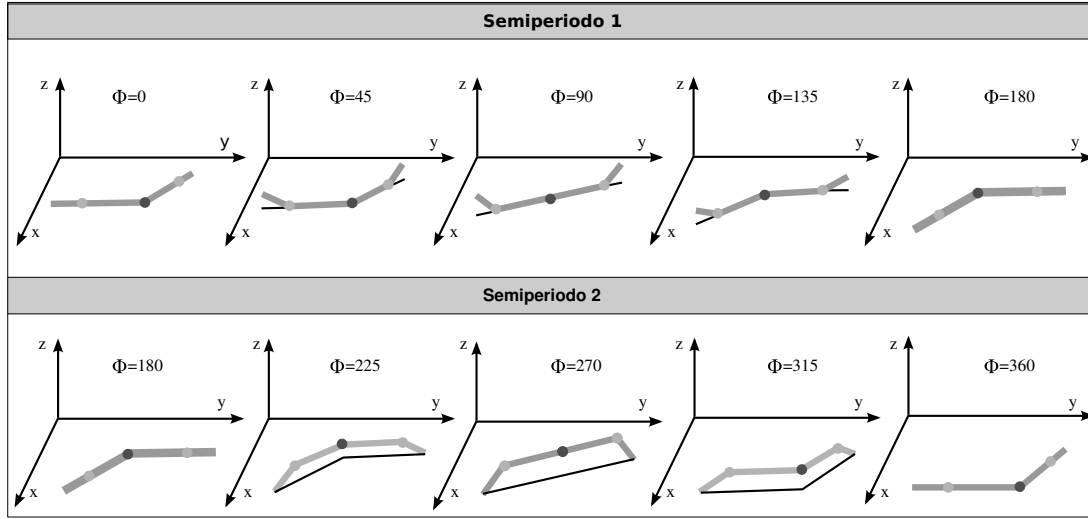


Figura 1.32: Modelo alámbrico de la configuración PYP realizando el desplazamiento lateral

de caminar. Su representación gráfica divide el espacio en **regiones de movimiento**. Finalmente se han calculado los valores de los diferentes parámetros para los robots construidos con módulos Y1.

## 1.8. Desplazamiento lateral

### 1.8.1. Descripción del movimiento

El desplazamiento lateral permite a la configuración PYP desplazarse hacia los lados sin variar la orientación de su eje corporal. Es un movimiento del tipo “remero”, igual que el presentado en el apartado ??, pero para un robot de tres módulos. Las restricciones a aplicar para que se realice este movimiento son las mismas que en el caso de rodar:  $\Delta\phi_{vh} = 90$  y  $\Delta\phi = 0$ . Tiene un único grado de libertad,  $A_h$ , que determina el paso del robot. El parámetro  $A_v$  puede ser igual a  $A_h$  o bien cercano a 0 para que la altura del centro de gravedad sea menor y se consiga más estabilidad.

En la figura 1.32 se muestra el movimiento del modelo alámbrico. En realidad, este modelo no es estable. Existen fases en las que sólo hay dos puntos de apoyo, como por ejemplo en  $\phi = 225$  por lo que el robot rodaría. Sin embargo se ha dibujado para entender mejor su mecanismo de desplazamiento. Para que el movimiento sea estable se tiene que verificar que el parámetro  $A_h$  sea menor que  $A_{hL}$  que se obtiene mediante la ecuación 1.31.

El movimiento se divide en **dos semiperiodos** comprendidos entre las fases  $\phi \in [0, 180]$  uno y  $\phi \in [180, 360]$  el otro. Durante el primero, son los módulos verticales los que se desplazan hacia adelante estando el horizontal en reposo en contacto con el suelo. Los dos brazos del robot, izquierdo y derecho

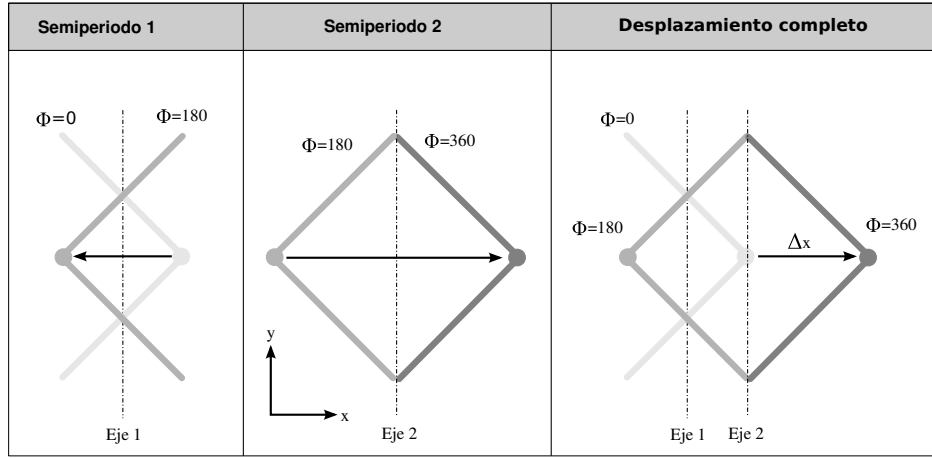


Figura 1.33: Vista superior del robot durante el desplazamiento lateral

se mueven de manera que al final del semiperiodo están adelantados. Durante el segundo es donde se realiza el verdadero desplazamiento. Los extremos del robot se usan como puntos de apoyo que permanecen fijos al suelo. El módulo horizontal se mueve de manera que se adelante y el ciclo vuelve a comenzar.

En la figura 1.33 se muestra la proyección horizontal de los gusanos en las fases 0, 180 y 360. Durante el primer semiperiodo la articulación horizontal rota y el robot cambia su forma de manera simétrica al eje 1. No hay desplazamiento. Durante el semiperiodo 2 los extremos entran en contacto con el suelo y al rotar la articulación horizontal el robot se desplaza una distancia. Al cabo de un ciclo, el robot se ha un paso  $\Delta x$ . Las ecuaciones para los ángulos de doblaje son:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_3 = A_v \sin \phi \\ \varphi_2 &= A_h \sin \left( \phi + \frac{\pi}{2} \right) = -A_h \cos \phi\end{aligned}\tag{1.34}$$

### 1.8.2. Estabilidad

La estabilidad se estudió en el apartado 1.7.5. Para que se pueda realizar el movimiento se tiene que emplear el modelo hexaédrico y los módulos tienen que tener unas dimensiones  $L \times W \times H$ . La condición para que el robot pueda realizar el desplazamiento lateral es:

**Condición de desplazamiento:** Si  $A_h < A_{hL}$ , el movimiento será un desplazamiento lateral.

El tipo de movimiento está determinado por el punto de trabajo  $(A_h, A_v)$  de la región de movimiento de la etapa 1, descrita en el apartado 1.7.6.1. El parámetro  $A_{hL}$  está dado por la ecuación 1.31. Dentro de la zona donde el movimiento es estable, el valor de  $A_v$  puede ser cualquier del rango  $[0, 90]$ .

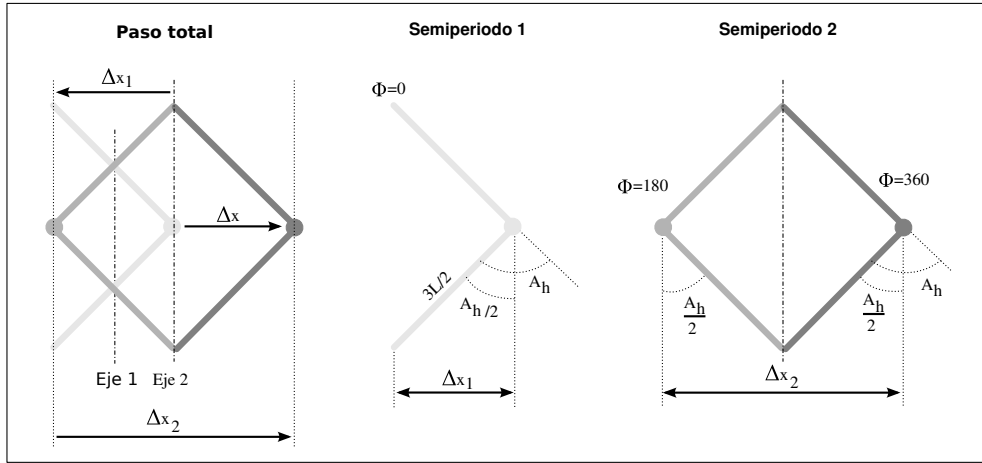


Figura 1.34: Deducción del paso en función de la geometría

### 1.8.3. Paso

El paso lo aproximaremos mediante ecuaciones obtenidas a partir de la geometría. Asumiremos lo siguiente:

- Durante el semiperiodo 1 no hay movimiento neto. El centro de masas está en el mismo sitio en las fases  $\phi = 0$  y  $\phi = 180$ .
- Durante el semiperiodo 2 los extremos permanecen en contacto con el suelo y NO deslizan.

Con estas asunciones, la ecuación propuesta para el paso es:

$$\Delta x = \frac{3L}{2} \sin\left(\frac{Ah}{2}\right) \quad (1.35)$$

El paso es mayor cuanto mayor sea el valor de la amplitud de la articulación horizontal.

#### 1.8.3.1. Deducción

El paso total será igual a la suma de los pasos dados en cada uno de los semiperiodos. Calcularemos el paso que da el punto central. El paso total será:

$$\Delta x = \Delta x_2 - \Delta x_1$$

A partir de la figura 1.34 se obtienen los pasos en ambos semiperiodos.

- Paso en semiperiodo 1:

$$\Delta x_1 = \frac{3L}{2} \sin\left(\frac{A_h}{2}\right)$$

- Paso en semiperiodo 2

$$\Delta x_2 = 2 \frac{3L}{2} \sin\left(\frac{A_h}{2}\right) = 3L \sin\left(\frac{A_h}{2}\right)$$

Con lo que el paso total queda como el de la ecuación 1.35.

#### 1.8.4. Sentido del movimiento

El sentido del movimiento se puede cambiar de las siguientes maneras:

- Si la fase varía entre 0 y 360 grados
  - $\Delta\phi_h > 0$ , desplazamiento en sentido positivo del eje  $x$
  - $\Delta\phi_h < 0$ , desplazamiento en sentido negativo del eje  $x$
- Si la fase varía entre 0 y -360
  - $\Delta\phi_h > 0$ , desplazamiento en sentido negativo del eje  $x$
  - $\Delta\phi_h < 0$ , desplazamiento en sentido positivo del eje  $x$

#### 1.8.5. Resumen

El movimiento de desplazamiento lateral se divide en **dos semiperiodos**. Uno en el que avanza el módulo central y otra en la que lo hacen los extremos. La coordinación es la misma que en el caso del movimiento de rodar. Si la amplitud es **menor que un cierto umbral**  $A_{hL}$  entonces el robot se moverá lateralmente.

El modelo alámbrico es inestable. El desplazamiento sólo se realizará si los módulos tienen un grosor. Para ese caso se ha propuesto **una ecuación para el paso**, deducida a partir de la geometría.

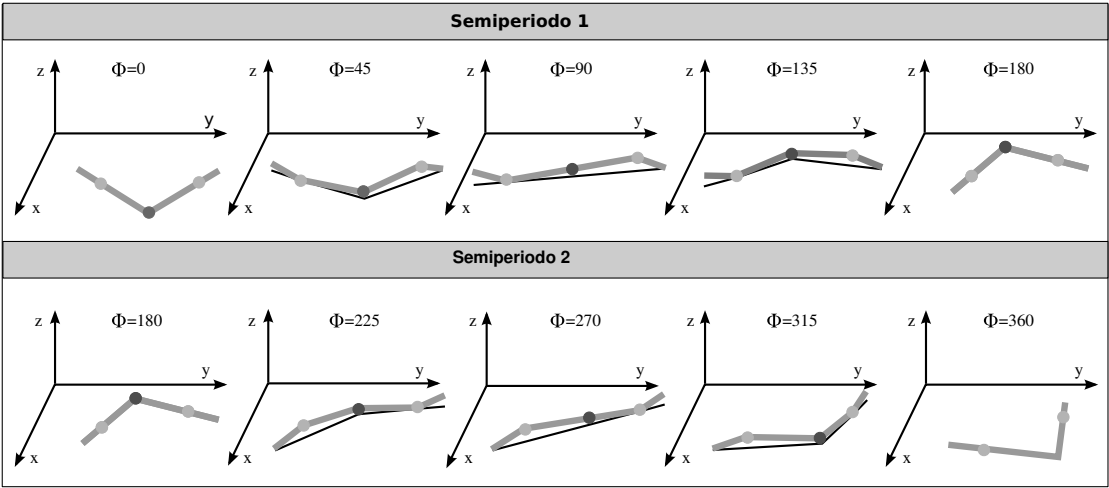


Figura 1.35: Modelo alámbrico de la configuración PYP realizando la rotación

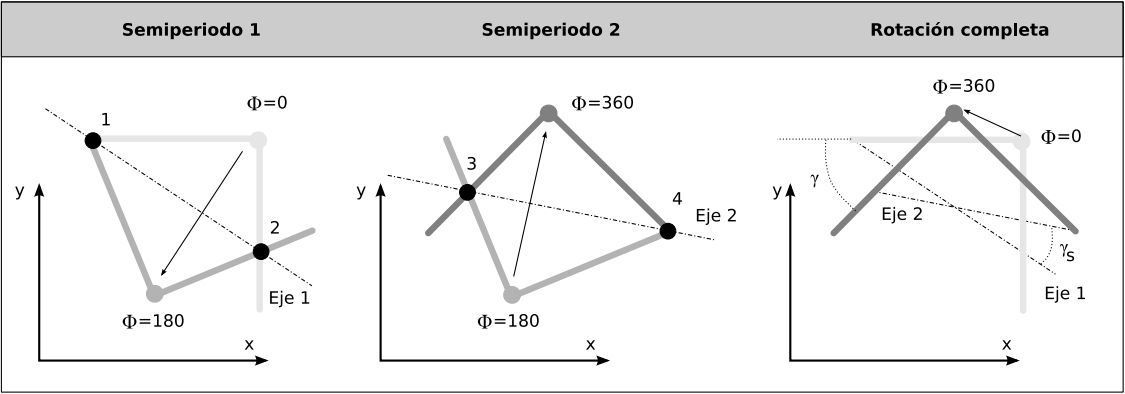


Figura 1.36: Vista superior del movimiento de rotación

## 1.9. Rotación

### 1.9.1. Descripción del movimiento

La rotación permite a la configuración PYP cambiar la orientación de su eje longitudinal. Las restricciones que se aplican para que se realice el movimiento son  $\Delta\phi_v = 180$  y  $\Delta\phi = 90$ . Tiene un único grado de libertad  $A_h$ , que determina el paso angular. El parámetro  $A_v$  puede tener cualquier valor comprendido entre 0 y 90.

En la figura 1.35 se muestra el movimiento del modelo alámbrico. Se divide en los **dos semiperiodos** comprendidos entre las fases  $\phi \in [0, 180]$  el primero y  $\phi \in [180, 360]$  el segundo. En cada semiperiodo el robot se desplaza simétricamente respecto a un eje. Cuando la fase inicial es 0, las articulaciones verticales tienen los ángulos de doblaje a 0 por lo que el robot se apoya en el suelo. Las articulaciones verticales comienzan a moverse una hacia arriba y otra hacia abajo, apareciendo dos puntos de apoyo. A la vez la articulación horizontal va rotando. Para  $\phi = 180$  la articulación horizontal se ha desplazado y el robot tiene una forma simétrica con  $\phi = 0$ .

En el segundo semiperiodo se repite el proceso pero ahora la articulación horizontal se mueve con respecto a otro eje de simetría. Los puntos de apoyo en el suelo son distintos con respecto al semiperiodo anterior.

En la figura 1.36 se muestran los semiperiodos 1 y 2 y la rotación final, en el planoxy. Durante el primer semiperiodo, los puntos de apoyo son el 1 y 2, contenidos en el eje de simetría. Cuando comienza el semiperiodo 2, los puntos de apoyo cambian al 2 y 4 por lo que ahora el eje de simetría cambia (eje 2) y al finalizar la rotación la forma del robot será la de  $\phi = 360$ . En la parte de la derecha se muestra el robot en sus posiciones iniciales ( $\phi = 0$ ) y finales ( $\phi = 360$ ). El ángulo que ha rotado es  $\gamma$  y el que forman los ejes de simetría es  $\gamma_s$ .

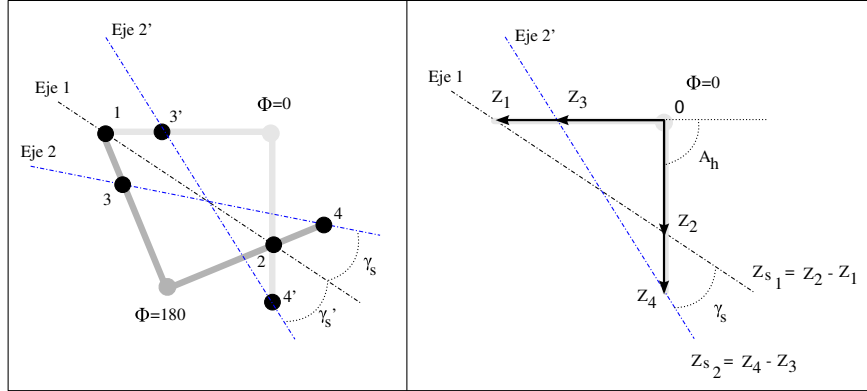
Las ecuaciones para los ángulos de doblaje son:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= A_v \sin \phi \\ \varphi_2 &= A_h \sin \left( \phi + \frac{\pi}{2} \right) = -A_h \cos \phi \\ \varphi_3 &= -A_v \sin \phi\end{aligned}\tag{1.36}$$

### 1.9.2. Paso

#### 1.9.2.1. Expresión

La ecuación para el cálculo del paso angular es:

Figura 1.37: Modelo geométrico empleados para el cálculo de  $\gamma_s$ 

$$\gamma = 2 \arctan \frac{\sin A_h}{\frac{3}{2} + \cos A_h} - 2 \arctan \left( \frac{3}{2} \frac{\sin A_h}{1 + \frac{3}{2} \cos A_h} \right) \quad (1.37)$$

El ángulo de rotación depende únicamente del parámetro  $A_h$ . Se verifica también que es igual al doble del ángulo de rotación de cada semiperiodo:  $\gamma = 2\gamma_s$ , en el modelo inalámbrico.

**Deducción de  $\gamma_s$**  El ángulo  $\gamma_s$  es el formado por los dos ejes de simetría de la rotación. El eje 1 pasa por los puntos 1 y 2 y el eje 2 por los puntos 3 y 4. El eje 2 es el que pasa por los puntos 3 y 4 cuando  $\phi = 180$ . Para el cálculo de  $\gamma_s$  es más sencillo utilizar el eje 2' que es el que pasa por los puntos 3' y 4', que son los puntos 3 y 4 cuando la fase es 0. Ambos ejes son simétricos respecto al eje 1 y se verifica que  $\gamma_s = \gamma'_s$  (ver figura 1.37, izquierda).

En la figura de la derecha se muestran los elementos para su cálculo. Para  $\phi = 0$ , se tiene que:

$$\varphi_1 = A_v \sin \phi = 0$$

$$\varphi_3 = A_v \sin (\phi + \pi) = 0$$

$$\varphi_3 = A_h \sin \left( \phi + \frac{\pi}{2} \right) = A_h$$

Aprovechando la simetría anterior, se tiene que:

$$\gamma_s = \gamma'_s = \arg(Zs_2) - \arg(Zs_1)$$

donde  $Zs_1$  y  $Zs_2$  son dos complejos que tienen la misma dirección que los ejes 1 y 2' respectivamente. El eje 1 se puede obtener como:

$$Zs_1 = Z_2 - Z_1 = Le^{-jA_h} + \frac{3}{2}L = L \left( e^{-jA_h} + \frac{3}{2} \right)$$

$$Zs_2 = Z_4 - Z_3 = \frac{3}{2}Le^{-jA_h} + L = L \left( \frac{3}{2}e^{-jA_h} + 1 \right)$$

donde los complejos  $z_1, z_2, z_3$  y  $z_4$  expresados con respecto al origen son:

$$\begin{aligned} Z_1 &= -\frac{3}{2}L \\ Z_2 &= Le^{-jA_h} \\ Z_3 &= -L \\ Z_4 &= \frac{3}{2}Le^{-jA_h} \end{aligned}$$

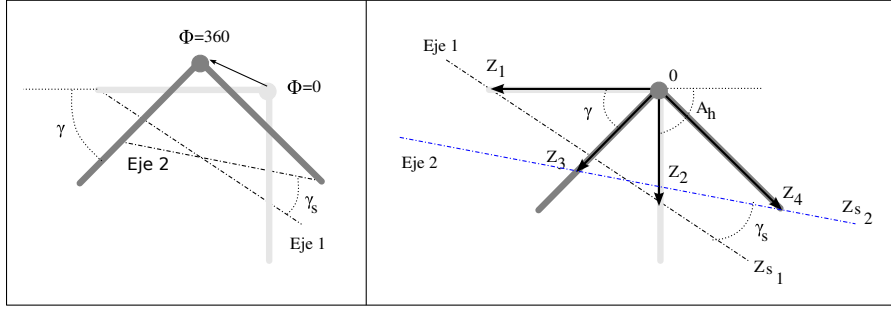
Calculando los argumentos de  $Zs_1$  y  $Zs_2$  se obtiene  $\gamma_s$ :

$$\arg(Zs_2) = \arctan \frac{\text{im}(Zs_2)}{\text{Re}(Zs_2)} = \arctan \frac{-\frac{3}{2}\sin A_h}{1 + \frac{3}{2}\cos A_h}$$

$$\arg(Zs_1) = \frac{\text{im}(Zs_1)}{\text{Re}(Zs_1)} = \arctan \frac{-\sin A_h}{\frac{3}{2} + \cos A_h}$$

**Deducción de  $\gamma$**  Ahora partimos del gusano en las posiciones iniciales ( $\phi = 0$ ) y finales ( $\phi = 360$ ). Definimos los complejos siguientes:

$$\begin{aligned} Z_1 &= -\frac{3}{2}L \\ Z_2 &= Le^{-jA_h} \\ Z_3 &= Le^{j(\gamma-\pi)} \\ Z_4 &= \frac{3}{2}Le^{j(\gamma-A_h)} \end{aligned}$$

Figura 1.38: Modelo geométrico empleados para el cálculo de  $\gamma$ 

Por una parte, el complejo  $Z_{s2}$  se puede expresar como:

$$Z_{s2} = Z_{s1} e^{j\gamma_s} = L e^{j\gamma_s} \left( \frac{3}{2} + e^{-jA_h} \right)$$

ya que  $Z_{s1} = Z_2 - Z_1 = L \left( \frac{3}{2} + e^{-jA_h} \right)$ . Por otro lado se puede expresar como:

$$Z_{s2} = Z_4 - Z_3 = L e^{j\gamma} \left( \frac{3}{2} e^{-jA_h} + 1 \right)$$

Tomando los argumentos de ambas expresiones e igualando:

$$\text{Arg}(Z_{s2}) = \gamma_s + \arctan \left( \frac{-\sin A_h}{\frac{3}{2} + \cos A_h} \right) = \gamma + \arctan \left( -\frac{\frac{3}{2} \sin A_h}{1 + \frac{3}{2} \cos A_h} \right)$$

De donde despejando  $\gamma$  queda:

$$\gamma = \gamma_s - \arctan \left( \frac{\sin A_h}{\frac{3}{2} + \cos A_h} \right) + \arctan \left( \frac{\frac{3}{2} \sin A_h}{1 + \frac{3}{2} \cos A_h} \right)$$

Y por la expresión de  $\gamma_s$  se tiene que  $\gamma = 2\gamma_s$

### 1.9.2.2. Variación de $\gamma$ con $A_h$

En la figura 1.39 se muestra gráficamente la relación del ángulo de rotación  $\gamma$  con el parámetro  $A_h$ . Es prácticamente lineal.

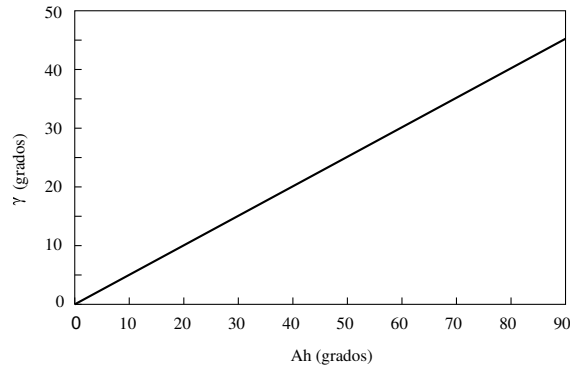


Figura 1.39: Variación del ángulo de rotación  $\gamma$  con el parámetro  $A_h$

### 1.9.3. Sentido de giro

El sentido del movimiento se controla con  $\Delta\phi_h$ . Las combinaciones son:

- $\phi$  variando entre 0 y 360;
  - $\Delta\phi > 0$ . Rotación antihoraria
  - $\Delta\phi < 0$ . Rotación horaria
- $\phi$  variando entre 0 y -360
  - $\Delta\phi > 0$ . Rotación horaria
  - $\Delta\phi < 0$ . Rotación antihoraria

### 1.9.4. Resumen

El movimiento de rotación se divide en **dos semiperiodos**. En cada uno de ellos el eje longitudinal ha cambiado su orientación. La coordinación se consigue haciendo que los extremos se oscilen en oposición de fase y el central con un desfase de 90 grados. El movimiento es estable para todas las amplitudes.

Se ha propuesto una ecuación para el **paso angular**, obtenida a partir de la geometría del movimiento. La relación entre el paso y la amplitud del módulo horizontal es muy lineal. A mayor amplitud, mayor ángulo de rotación.

## 1.10. Principios de locomoción

La locomoción de las configuraciones mínimas se puede resumir en 5 principios de locomoción

1. **Principio de la configuración PP.** Un robot constituido por la unión en cadena de **dos módulos** de tipo cabeceo que son controlados mediante generadores sinusoidales es capaz de desplazarse en línea recta hacia adelante o atrás.
2. **Principio de la configuración PYP.** Un robot constituido por la unión en cadena de **tres módulos**, siendo los de los extremos de tipo cabeceo y el central de viraje, controlados mediante osciladores sinusoidales, es capaz de desplazarse sobre una superficie bidimensional utilizando al menos cinco tipos de modos de caminar diferentes: línea recta, trayectoria circular, desplazamiento lateral, rodar y rotar.
3. **Principio de los parámetros de control.** El espacio de control de las configuraciones mínimas tiene cuatro dimensiones y sus puntos son de la forma  $(A_h, A_v, \Delta\phi_v, \Delta\phi_{vh})$ , donde  $A_v$  y  $A_h$  son las amplitudes de los generadores verticales y horizontales,  $\Delta\phi_v$  es la diferencia de fase entre los verticales y  $\Delta\phi_{vh}$  entre los verticales y el horizontal.
4. **Principio de la coordinación.** Las diferencias de fase entre los generadores,  $\Delta\phi_v$  y  $\Delta\phi_{vh}$ , son los parámetros que determinan la coordinación del movimiento, el modo de caminar y en qué sentido se realiza.
5. **Principio del paso.** Las amplitudes de los generadores,  $A_v$  y  $A_h$ , determinan el paso del robot (lineal o angular). Al aumentar estos parámetros, el paso será mayor, salvo en el movimiento de rodar que disminuirá.

## 1.11. Conclusiones

En este capítulo se ha abordado el **problema de la locomoción de las configuraciones mínimas** en una superficie plana, homogénea y sin obstáculos cuando se utilizan generadores sinusoidales para su control.

Se trata de un **problema nuevo** que no había sido antes planteado ni estudiado por otros investigadores. Proponemos una **metodología para resolverlo** basada en explorar los modos de caminar de las configuraciones candidatas empleando algoritmos genéticos.

Se han encontrado las dos **configuraciones mínimas** que se mueven en una y dos dimensiones. La configuración **PP** está constituida por dos módulos de cabeceo y la **PYP** por tres, dos de cabeceo y el central de viraje. La primera se mueve en línea recta, hacia adelante o atrás y la segunda puede realizar cinco modos de caminar diferentes: línea recta, trayectoria circular, desplazamiento lateral, rodar y rotar.

Las configuraciones mínimas son **unidades atómicas de movimiento (UAM)** ya que contienen el menor número posible de módulos para desplazarse. Con ellas se **maximiza el número de subrobots** en los que puede dividirse un robot modular autoconfigurable para resolver problemas como el de la maximización del área de cobertura. Además, las configuraciones mínimas son **las más eficientes** en cuanto a la energía que necesitan para desplazarse. La configuración PYP, considerada como unidad atómica de movimiento, puede alcanzar cualquier punto  $(x, y)$  del suelo, se puede orientar en cualquier dirección y puede recuperar su posición original en caso de volcar, gracias al movimiento de rodar.

Se ha propuesto una **técnica de análisis y síntesis de movimientos** basado en identificar las configuraciones mínimas en el modelo alámbrico de otros robots. Esto permite encontrar nuevos modos de caminar así como deducir la viabilidad del movimiento de ciertas configuraciones que a priori no se sabría si pueden desplazarse.

El **modelo de control basado en CPG simplificados** de tipo generadores sinusoidales es válido también para la locomoción de las configuraciones mínimas. Por ello se puede aplicar al movimiento en una dimensión de cualquier robot ápodos con más de 1 módulo y en el caso del movimiento en dos dimensiones a cualquier robot del grupo cabeceo-viraje de más de dos módulos.

Todos los modos de caminar quedan caracterizados por las ecuaciones de sus subespacios de control que establecen relaciones entre los cuatro parámetros  $A_v$ ,  $A_h$ ,  $\Delta\phi_v$  y  $\Delta\phi_{vh}$ . Los parámetros libres son los grados de libertad del movimiento. Se ha estudiado la cinemática de todos los movimientos y se han propuesto las ecuaciones para calcular el paso en función de sus parámetros de control.

El **movimiento en línea recta** tiene dos grados de libertad,  $A$  y  $\Delta\phi$ . Se ha propuesto un criterio para establecer el punto de trabajo donde la coordinación es la mejor. Se ha demostrado que para el modelo alámbrico, la mejor coordinación se consigue en el rango de  $\Delta\phi$  entre 108 y 110.

El **desplazamiento en trayectoria circular** es similar al de línea recta añadiendo un parámetro más que determina el radio de giro. Tiene por tanto tres grados de libertad.

El **movimiento de rodar** se ha estudiado en detalle y se ha deducido el valor de la amplitud mínima que se tiene que aplicar para que se pueda realizar, en función de las dimensiones del módulos. Tiene un único grado de libertad,  $A$ , que determina la forma que adopta el robot durante el movimiento. Para realizarlo las dos articulaciones verticales están en fase y la horizontal desfasada 90 grados.

El **desplazamiento lateral** permite que el robot se mueva hacia los lados manteniendo la misma orientación de su cuerpo. La coordinación es exactamente la misma que para el caso de rodar. Según la amplitud escogida se realizará un movimiento u otro.

El **movimiento de rotar** permite al robot cambiar la orientación de su cuerpo. Tiene un grados de libertad,  $A$ , que determina el paso angular a rotar. Las dos articulaciones verticales están en oposición de fase, y la horizontal desfasada 90 grados.

Finalmente, se han resumido todas las ideas principales en cinco **principios de locomoción** (apartado 1.10).



# Bibliografía

- [1] J. Gonzalez-Gomez and E. Boemo. Motion of Minimal Confiurations of a Modular Robot: Sinusoidal, Lateral Rolling and Lateral shift. In *Proc. of the Int. Conf. on Climbing and Walking Robots*, pages 667–674, September 2005.
- [2] R. C. F. Lentz, G. J. Taylor, S. J. Lawrence, L. M. Martel, Wei-Min Shen, Peter M. Will, M. H. Sims, S. Colombano, D. Kortenkamp, B. Damer, and W. Chun. SuperBots on the lunar surface: A robotic multi-use lunar explorer (MULE). In *Lunar Exploration Analysis Group (LEAG)*, 2005.
- [3] S. Murata and H. Kurokawa. Self-Reconfigurable Robot. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 14(1):71–78, March 2007.
- [4] W. Shen, J. Bogdanowicz, W. Chun, M. Yim, Peter M. Will, M. Sims, S. Colombano, D. Kortenkamp, S. Vanderzyl, E. Baumgartner, and J. Taylor. SuperBots: Modular, multifunctional, reconfigurable robotic system for space exploration. In *Lunar Exploration Analysis Group (LEAG)*, 2005.
- [5] M. Yim. *Locomotion with a unit-modular reconfigurable robot*. PhD thesis, Stanfofd University, December 1995. Disponible on-line en <http://www-db.stanford.edu/TR/CS-TR-95-1536.html> [Última consulta 10-Mayo-2008].
- [6] M. Yim, K. Roufas, and D. Duff. Modular Reconfigurable Robots in Space Applications. *Autonomous Robots*, 14(2-3):225–237, March 2003.
- [7] M. Yim, B. Shirmohammadi, and J. Sastra. Towards robotic self-reassembly after explosion. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 2767–2772, October 2007.
- [8] H. Zhang, Z. Deng, and W. Wang. Novel Reconfigurable Robot with 3 DOF Active Joints for Rugged Terrain. In *Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 5588 – 5593, October 2006.
- [9] H. Zhang, W. Wang, and Z. Deng. A Novel Reconfigurable Robot for Urban Search and Rescue. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 3(4):359–366, 2006.