

# Capítulo 1

## Locomoción en 1D

”Si no conozco una cosa, la investigaré.”

– *Louis Pasteur*

### 1.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos la locomoción en línea recta de los robots ápodos modulares del grupo cabeceo-cabeceo cuando se utiliza como controlador el modelo de osciladores sinusoidales presentado en el apartado ??.

Primero analizaremos la locomoción utilizando el modelo continuo de robot. Se obtendrán los principios básicos de locomoción, el espacio de formas, las dimensiones, el criterio de estabilidad y se propone la ecuación para el cálculo del paso. A continuación particularizaremos las ideas anteriores para el modelo alámbrico de los robots discretos y presentamos la metodología para resolver los problemas de la cinemática directa e inversa. Seguidamente mostraremos un caso de estudio donde aplicaremos todas los conceptos anteriores a un robot de 8 módulos. Obtendremos los datos que serán contrastados con los resultados experimentales en el capítulo ???. Finalmente resumimos todas las ideas en 11 principios de locomoción.

### 1.2. Modelo continuo

Aunque los robots modulares del grupo cabeceo-cabeceo son de naturaleza discreta, la comprensión del modelo continuo nos permite obtener las propiedades esenciales de la locomoción en una dimensión que son comunes a todos los robots ápodos, con independencia del número de módulos. El

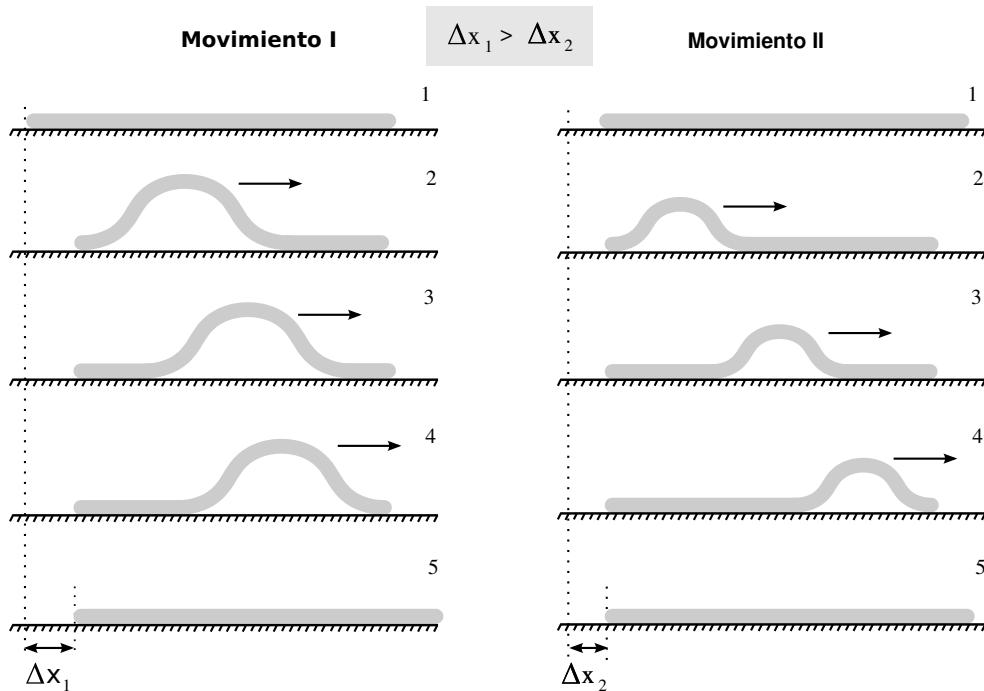


Figura 1.1: Locomoción mediante propagación de ondas para dos tamaños diferentes de ondulaciones

desplazamiento se produce sólo si los movimientos de los módulos del robot están bien coordinados. Veremos que con el modelo continuo esta coordinación se explica de manera satisfactoria.

El mecanismo de locomoción es debido a la aparición de ondas corporales que se propagan a lo largo del robot.

### 1.2.1. Propagación de ondas

El mecanismo de locomoción basado en la **propagación de ondas** está inspirado en el movimiento de las orugas. En ellas aparece una ondulación en su cuerpo que se propaga desde la cola hasta la cabeza haciendo que el animal se desplace una distancia  $\Delta x$ , que denominamos **paso**.

Este mecanismo de locomoción tiene las siguientes propiedades:

- **El sentido de propagación de la onda corporal determina si el robot avanza o retrocede.**  
En el ejemplo de la figura 1.1 las ondas se desplazan hacia la derecha haciendo que los robots se muevan en esa misma dirección.
- **Las dimensiones de la onda corporal determinan el paso.** En la figura 1.1 se muestra la locomoción de un robot cuando se utilizan dos ondas corporales de diferentes tamaños. El

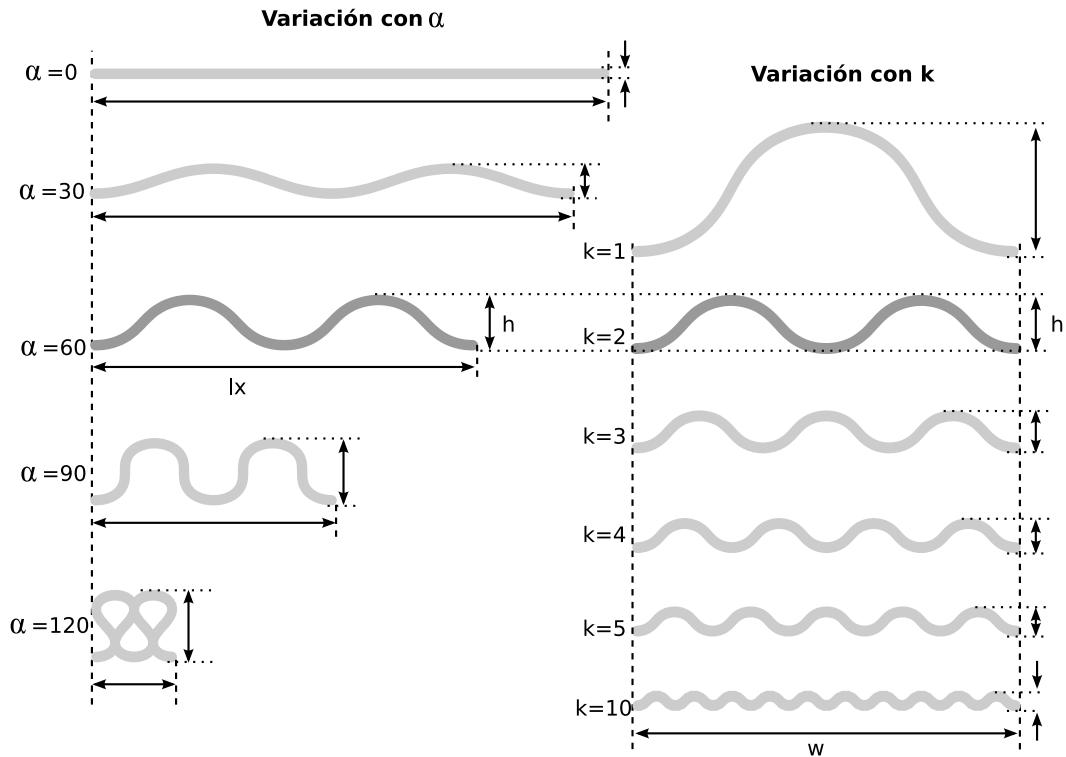


Figura 1.2: Variación de la forma del robot con los parámetros  $\alpha$  y  $k$ , cuando  $\phi = -90$

movimiento I emplea una onda de mayor altura lo que hace que el paso sea mayor que el del movimiento II ( $\Delta x_1 > \Delta x_2$ )

Vemos que son las propiedades globales de la onda las que determinan el avance del robot. Esto nos va a permitir describir el modelo cinemático a partir de las características de las ondas que recorren el cuerpo del robot.

Cuando se utiliza el modelo de control de generadores sinusoidales descrito en el apartado ?? la onda corporal que aparece es de tipo serpantinoide (apartado ??). En los siguientes apartados estudiaremos esta onda, sus dimensiones y deduciremos los criterios de estabilidad y la ecuación del paso.

### 1.2.2. Onda serpantinoide

Los parámetros que caracterizan la onda serpantinoide están resumidos en la tabla ?? . Son el ángulo de serpenteo  $\alpha$ , el número de ondulaciones  $k$  y la fase  $\phi$ . El par  $(k, \alpha)$  determina la forma del robot y sus dimensiones (altura  $h$  y anchura  $w$ ) y lo denominamos **punto de trabajo**.

En el modelo continuo **la altura y la anchura no dependen de la fase**, permaneciendo constantes durante la propagación de la onda. En la figura 1.2 se muestra gráficamente la relación entre  $(k, \alpha)$  y

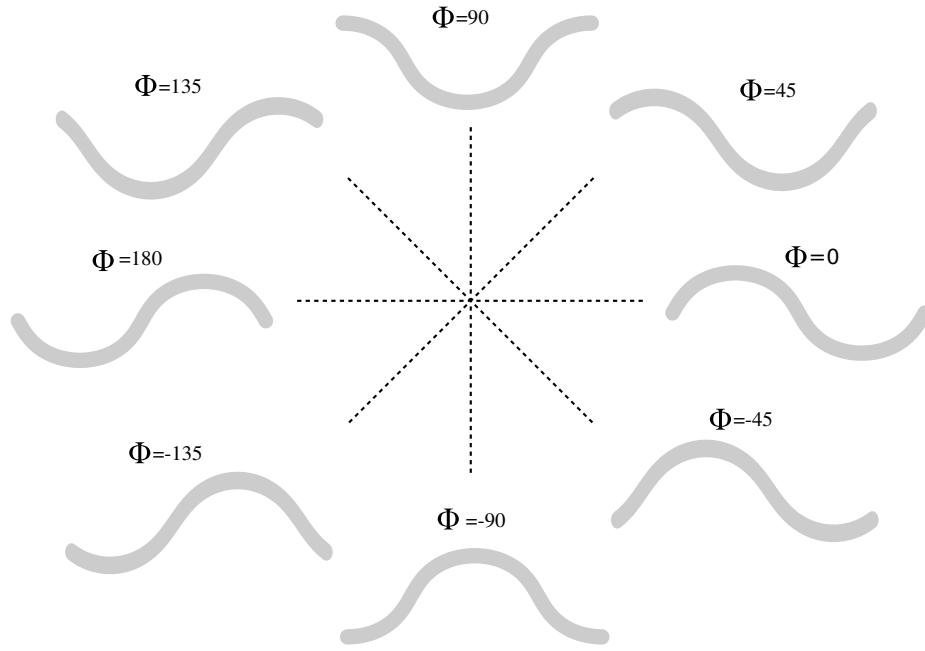


Figura 1.3: Forma de la onda para diferentes fases, con  $k = 1$  y  $\alpha = 60$  grados .

la forma, para un robot con longitud  $l$  y fase  $-90$ . En la parte central se ha dibujado en un color más oscuro la forma del robot para  $\alpha = 60$  y  $k = 2$ . En la izquierda están las variaciones con el parámetro  $\alpha$ . A mayor valor de  $\alpha$ , mayor es la altura  $h$  pero menor es la anchura  $w$ . En la derecha se ha dibujado la variación con  $k$ . Al aumentar el número de ondulaciones, la altura disminuye pero  $w$  permanece constante.

La forma del robot con la fase  $\phi$  se muestra en la figura 1.3. Un incremento positivo de la fase hace que la onda se desplace en sentido negativo del eje  $x$ .

### 1.2.3. Espacio de formas $h_1$

Denominamos espacio de formas  $h_1$  al conjunto de todos los puntos de trabajo  $(k, \alpha)$  que se encuentran en la región  $\alpha \in [0, 120]$  y  $k \geq 1$ . Cada uno de estos puntos determina la forma y dimensiones del robot para una fase  $\phi$  y longitud  $l$  dadas. Este espacio lo representaremos en un sistema cartesiano, cuyas abscisas son el número de ondulaciones y las ordenadas el ángulo de serpenteo, como se muestra en la figura 1.4. En este ejemplo se está usando una fase de  $\phi = -90$ . Para los puntos de la recta  $\alpha = 0$ , el robot es un segmento horizontal de longitud  $l$ . Para ver las variaciones de la forma tomemos como ejemplo el punto de trabajo  $(4, 60)$ . Un desplazamiento en sentido negativo de las ordenadas hace que el ángulo de serpenteo decrezca y por tanto el robot se vaya “aplanando”:  $w$  aumenta y  $h$  disminuye (comparar los puntos  $(4, 60)$  y  $(4, 30)$ ). Un desplazamiento en el sentido negativo de las abscisas provoca que el número de ondulaciones disminuya, aumentando  $h$  y permaneciendo  $w$  constante (comparar los puntos  $(4, 60)$  y  $(2, 60)$ ).

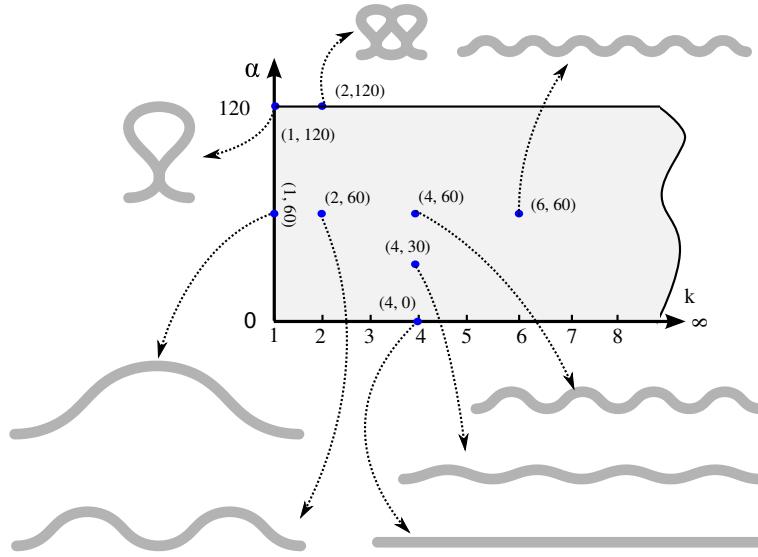


Figura 1.4: Representación gráfica del Espacio de formas  $h_1$ . Se muestran las formas del robot en diferentes puntos de trabajo, para una fase de -90 grados.

Esta representación del espacio de formas nos permitirá expresar gráficamente las restricciones en las dimensiones del robot. También nos servirá para dibujar las gráficas de las dimensiones y el paso con respecto a los puntos de trabajo.

En el modelo continuo el valor de  $k$  no está acotado, por lo que el eje  $x$  se extiende hasta el infinito.

#### 1.2.4. Dimensiones del robot

Cada punto del espacio de formas se corresponde con un robot de unas dimensiones. Las ecuaciones que relacionan  $(k, \alpha)$  con las dimensiones normalizadas son ?? y ???. A partir de ellas se calcula la altura y anchura de los robots con una longitud  $l$  y número de ondas  $k$  (ecuaciones ?? y ??).

En este apartado analizaremos las variaciones de las dimensiones de un robot continuo de longitud  $l = 1$  al movemos por el espacio de formas. Representamos los valores de  $h$  y  $w$  como porcentajes respecto a la longitud total. Dado que el parámetro  $k$  no está acotado, limitaremos la región a  $k \leq 10$  para una mejor representación de las gráficas.

##### 1.2.4.1. Altura

La altura normalizada  $h_n$  se obtiene a partir del punto  $(k, \alpha)$  mediante la ecuación ???. En la figura 1.5 se ha representado gráficamente. El punto de trabajo donde el robot tiene una altura mayor es  $(1, 120)$ ,

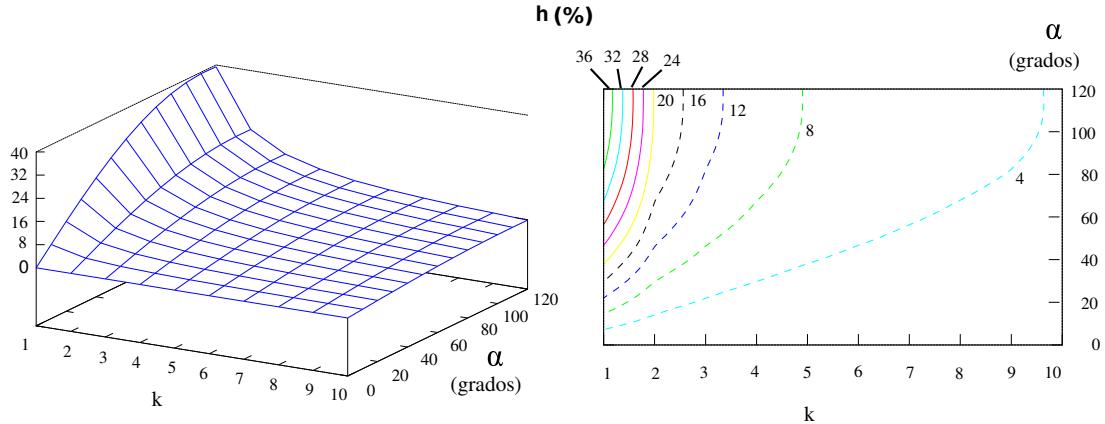


Figura 1.5: Altura normalizada de un robot ápodo continuo en función del punto de trabajo  $(k, \alpha)$

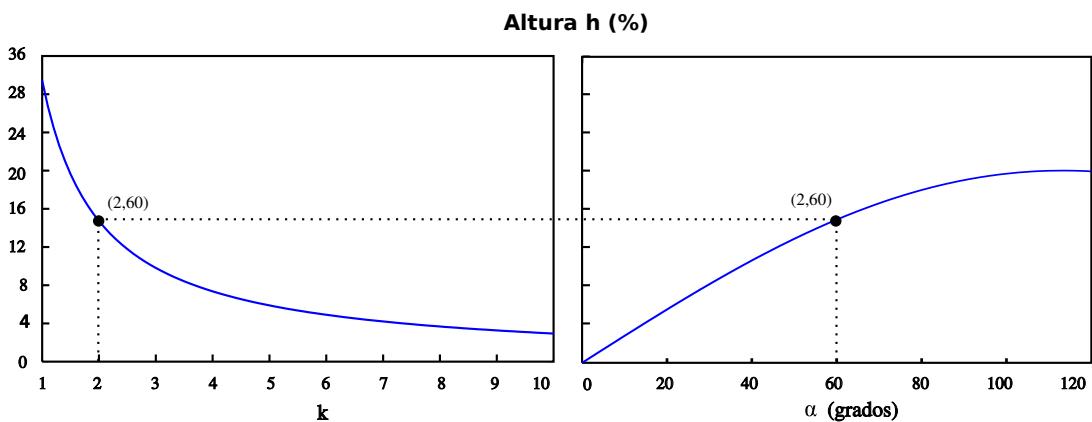


Figura 1.6: Altura asociada al punto de trabajo  $(2, 60)$  y sus variaciones con  $k$  y  $\alpha$

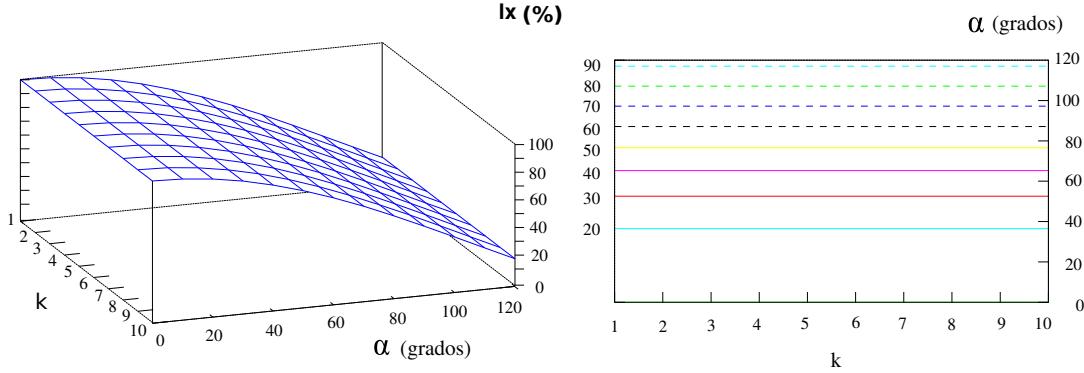


Figura 1.7: Anchura normalizada de un robot ápodo continuo en función del punto de trabajo ( $k, \alpha$ )

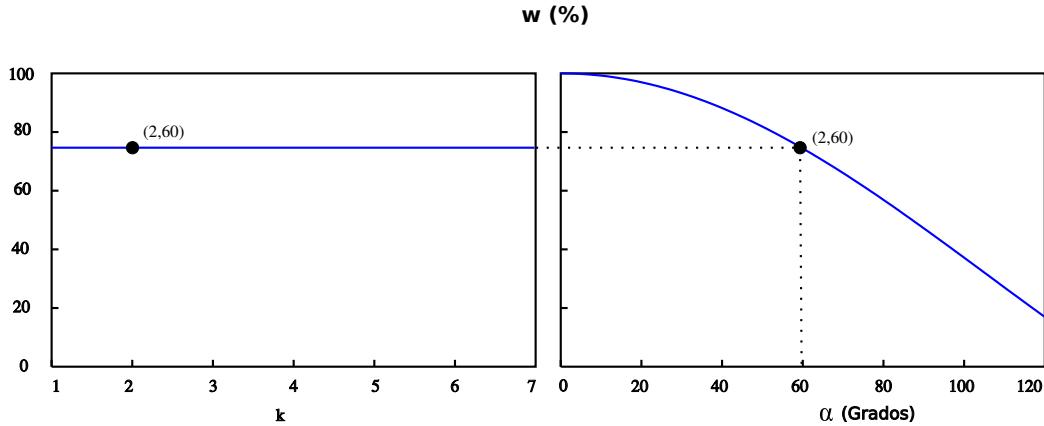


Figura 1.8: Anchura del punto de trabajo (2, 60) y sus variaciones con  $k$  y  $\alpha$ .

cuyo valor es aproximadamente del 40 % de su longitud. Se observa que disminuye con el incremento de  $k$  y con el decremento de  $\alpha$ .

En la figura 1.6 se ha representado la altura del punto de trabajo (2, 60) y su variación en función de los parámetros  $k$  (izquierda) y  $\alpha$  (derecha). La variación con  $\alpha$  es bastante lineal entre los valores de 0 y 60 grados aproximadamente. El valor de  $h$  es inversamente proporcional a  $k$ .

#### 1.2.4.2. Anchura

La anchura normalizada se obtiene a partir del punto  $(k, \alpha)$  mediante la ecuación ???. La representación gráfica se muestra en la figura 1.7. La anchura es máxima cuando  $\alpha = 0$  y disminuye con el incremento de  $\alpha$ . Permanece constante con  $k$ .

En la figura 1.8 se muestra el punto de trabajo (2, 60) y su variación con  $k$  y  $\alpha$ . Para valores de  $\alpha$  entre 60 y 120 aproximadamente, la variación de  $w$  es bastante lineal.

### 1.2.5. Principio de estabilidad

La locomoción del robot está determinada por su forma y por tanto por la posición del punto de trabajo dentro del espacio de formas. En unas zonas el movimiento será estáticamente estable, en otras no existirá desplazamiento o será muy brusco. En este apartado estableceremos un criterio para determinar en qué región del espacio de formas el movimiento es estáticamente estable.

Diremos que el **robot es estable** para una fase  $\phi$  si se verifica que al menos existen dos puntos de apoyo con el suelo y que la proyección del centro de gravedad cae dentro del segmento que une estos dos puntos.

Definimos la **locomoción estáticamente estable** como aquella en la que el robot es estable para todas las fases. Es decir, que el robot sea estable durante toda la propagación de la onda. Se verifica, además, que cuando la locomoción es de este tipo el centro de gravedad permanece siempre a la misma altura y el movimiento es muy suave.

**Principio de estabilidad** *Si el número de ondulaciones ( $k$ ) es mayor o igual a dos, entonces el movimiento del robot será estáticamente estable.*

Además, dentro de la región de estabilidad, cuanto mayor sea el valor de  $k$  mayor será la estabilidad del robot. Al aumentar  $k$ , el número medio de puntos de apoyo será mayor y la altura del robot disminuirá, mejorando la estabilidad.

En los siguientes apartados estudiaremos este principio con más detalle.

#### 1.2.5.1. Estabilidad cuando $k \geq 2$

Cuando el número de ondulaciones es mayor o igual a 2, siempre existirán, al menos, dos puntos de apoyo en el suelo y el robot será estable. En la figura 1.9 se muestran cinco instantes durante el desplazamiento de un robot con dos ondulaciones, con fases correspondientes de -90, 180, 90, 0 y -90 grados. Inicialmente existen tres puntos de apoyo por lo que el robot es estable. Al variar la fase las ondas se propagan. Para  $\phi = 180$  sólo hay dos puntos de apoyo, pero como la proyección del centro de gravedad ( $C_G$ ) está dentro del segmento que une estos puntos, el robot es estable. Esta condición se verifica para el resto de fases. Además, la altura del centro de gravedad permanece constante.

La situación es similar para  $k \geq 2$  pero con la diferencia de que el número medio de puntos de apoyo aumentará.

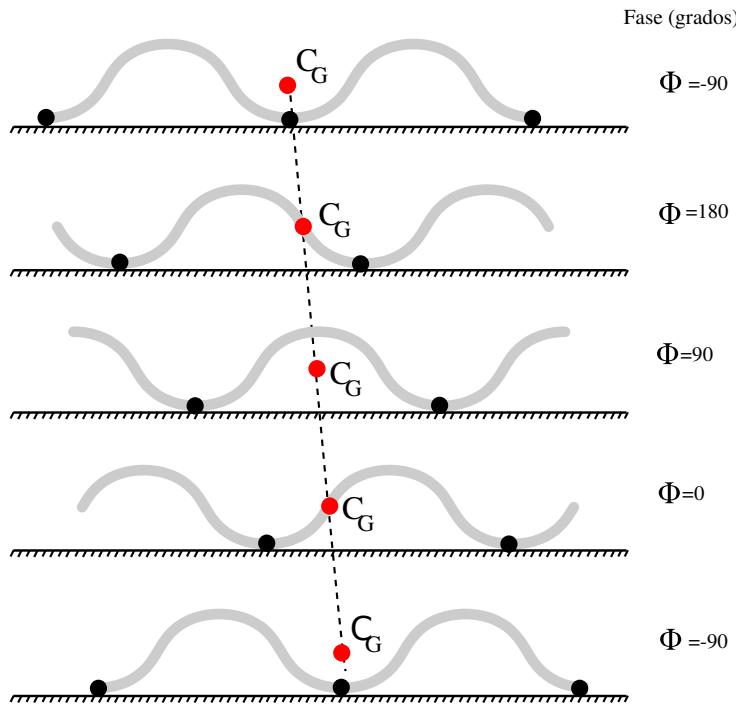


Figura 1.9: Locomoción del robot cuando  $k = 2$ . Es estáticamente estable

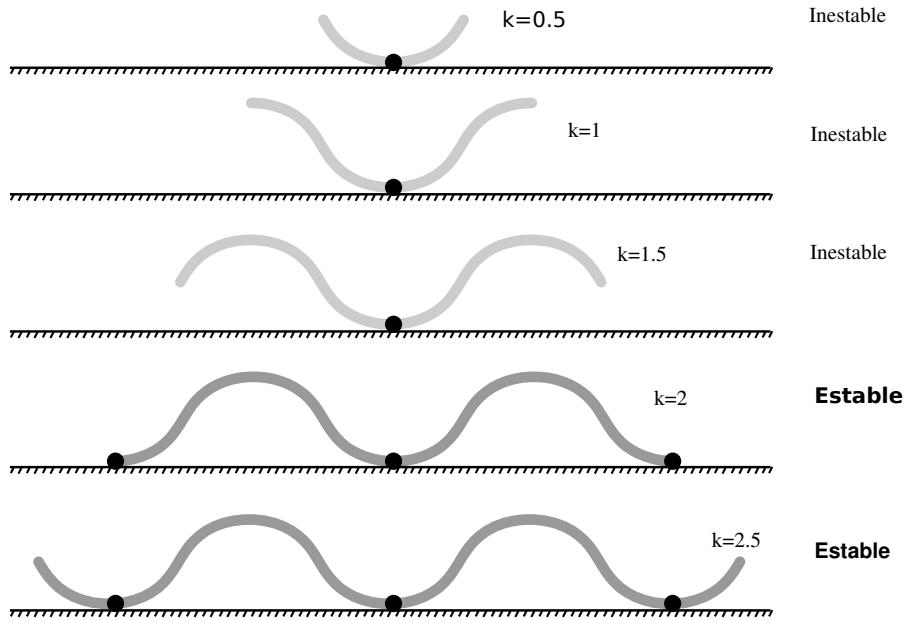
#### 1.2.5.2. Estabilidad para $k < 2$

Cuando  $k < 2$  existen fases en las que sólo hay un punto de apoyo. En esta situación el robot se inclinará hacia adelante o hacia atrás. Durante la locomoción, el número medio de puntos de apoyo será inferior a 2.

El caso peor se produce cuando sólo hay un punto de apoyo. Ocurre para las fases en las que el robot tiene forma de "U" en su parte central. En la figura 1.10 se muestra esta situación para diferentes valores de  $k$ . Cuando  $k = 2$  se pasa de uno a tres puntos de apoyo.

Como ejemplo de un movimiento no estáticamente estable estudiaremos el caso en que  $k = 1$ . Primero analizaremos la relación entre la fase del robot y la estabilidad. En la figura 1.11 se muestra en la izquierda la forma de la onda para diferentes fases y en la derecha la orientación real del robot. Las formas son iguales, pero varían su inclinación. En el caso de  $\phi = -90$  ambas orientaciones son iguales. Los puntos de apoyo A y B están alineados. Para  $\phi = 180$ , el punto de apoyo inicial es A. El robot se debe inclinar hacia la derecha para que el punto B también entre en contacto con el suelo. En esta situación el robot también es estable. Ocurre lo mismo para  $\phi = 0$  pero la inclinación es hacia el lado contrario.

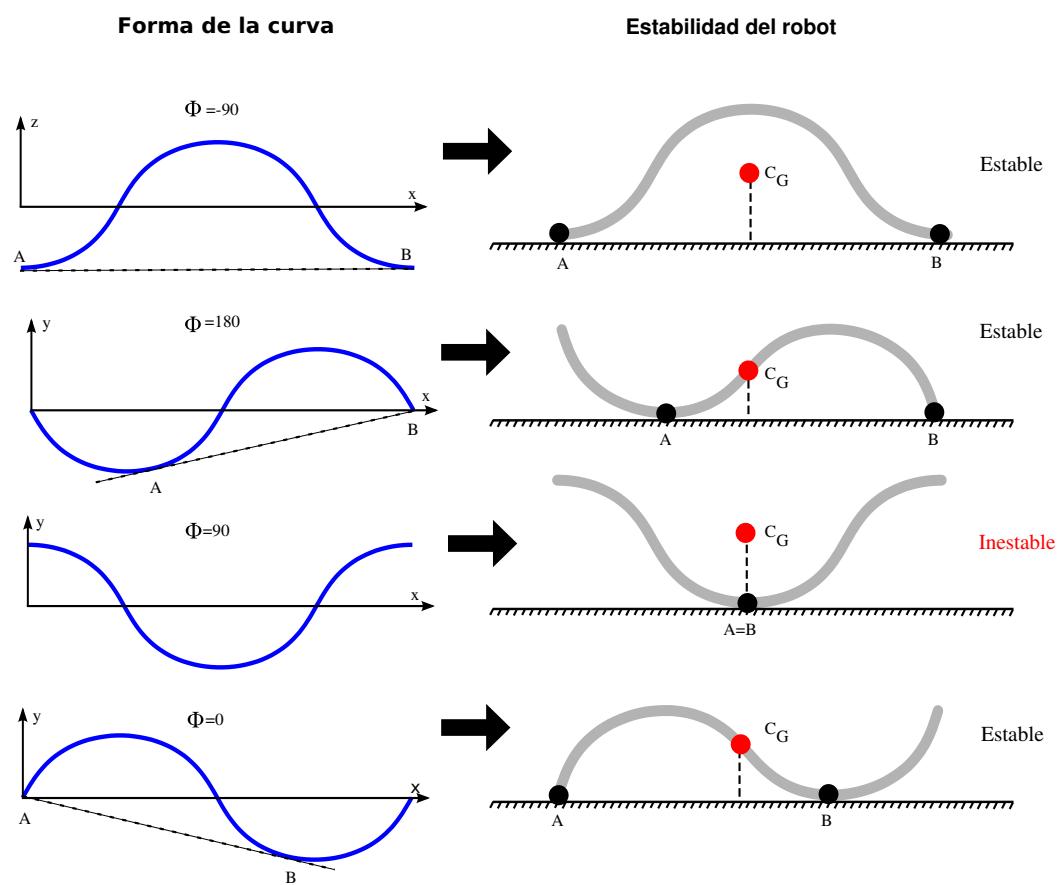
Sin embargo, el caso peor se produce para  $\phi = 90$ . Existe un único punto de apoyo por lo que el robot se inclinará hacia la derecha, la izquierda u oscilará.

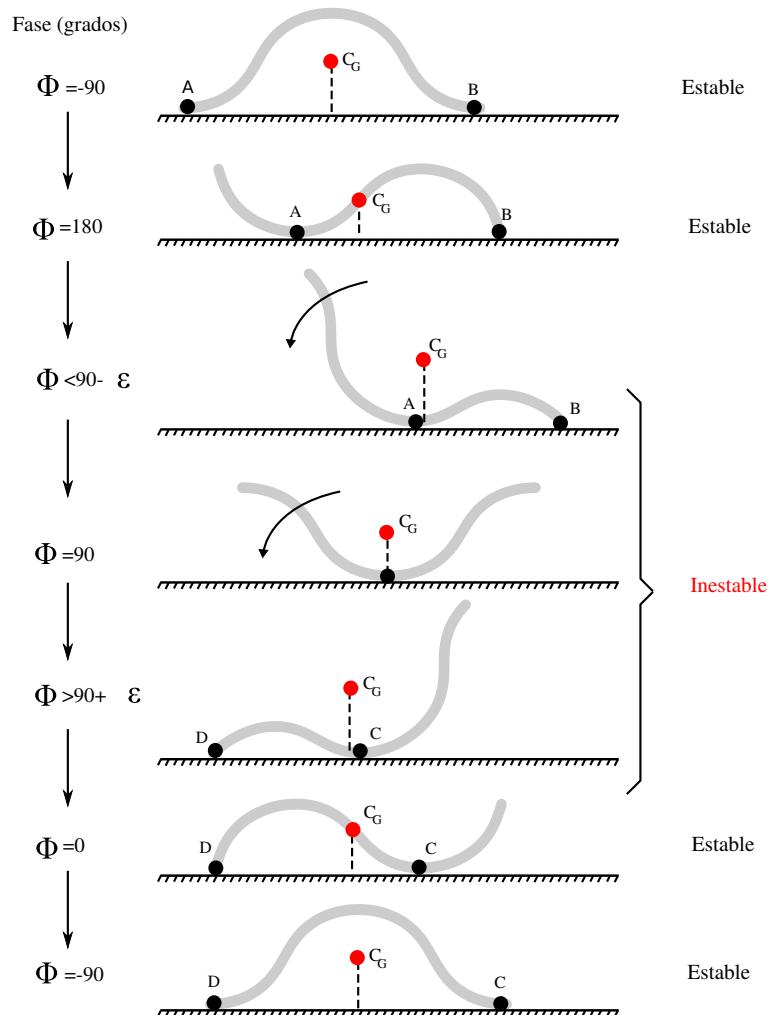
Figura 1.10: Estabilidad del robot en función de  $k$ 

A partir de esta información se puede obtener cómo será la locomoción del robot. Se ha dibujado en la figura 1.12. Se comienza con una situación estable. Al aumentar la fase la onda se desplaza hacia la derecha. El robot empieza a desplazarse también en este sentido. Cuando  $\phi = 180$  el centro de gravedad se encuentra más próximo al punto  $A$  y su altura ha disminuido. Cuando la fase está cercana a 90 grados (el caso peor), la proyección del centro de gravedad está muy cerca de  $A$ . El robot está todavía inclinado hacia el lado derecho. Cuando se alcanza la situación en la que la fase es cercana a 90 pero mayor ( $90 + \varepsilon$ ), el robot se inclinará hacia la izquierda desapareciendo los puntos de apoyo  $A$  y  $B$  y apareciendo dos nuevos: el  $C$  y el  $D$ . Esta transición no es estable. Provoca un movimiento brusco del robot. La onda sigue propagándose y el movimiento continúa estable hasta alcanzar la fase inicial  $\phi = -90$ , donde finaliza el ciclo.

El resultado es que para el caso de  $k = 1$  y en general para  $k < 2$ , el robot no es estable en todo momento. Existe un rango de fases en las que un extremo golpea contra el suelo. Esto no significa que no pueda existir movimiento, sino que aparecerá una transición “brusca” en algunas fases. Este efecto se puede controlar con el parámetro  $\alpha$ . Para valores bajos, el robot tendrá poca altura y la inclinación de una orientación a otra será suave.

Además, cuando la locomoción no es estáticamente estable la altura del centro de masas del robot no permanece constante sino que oscila con la propagación de la onda.

Figura 1.11: Relación entre la fase del robot y la estabilidad para  $k = 1$

Figura 1.12: Estabilidad del robot para  $k = 1$

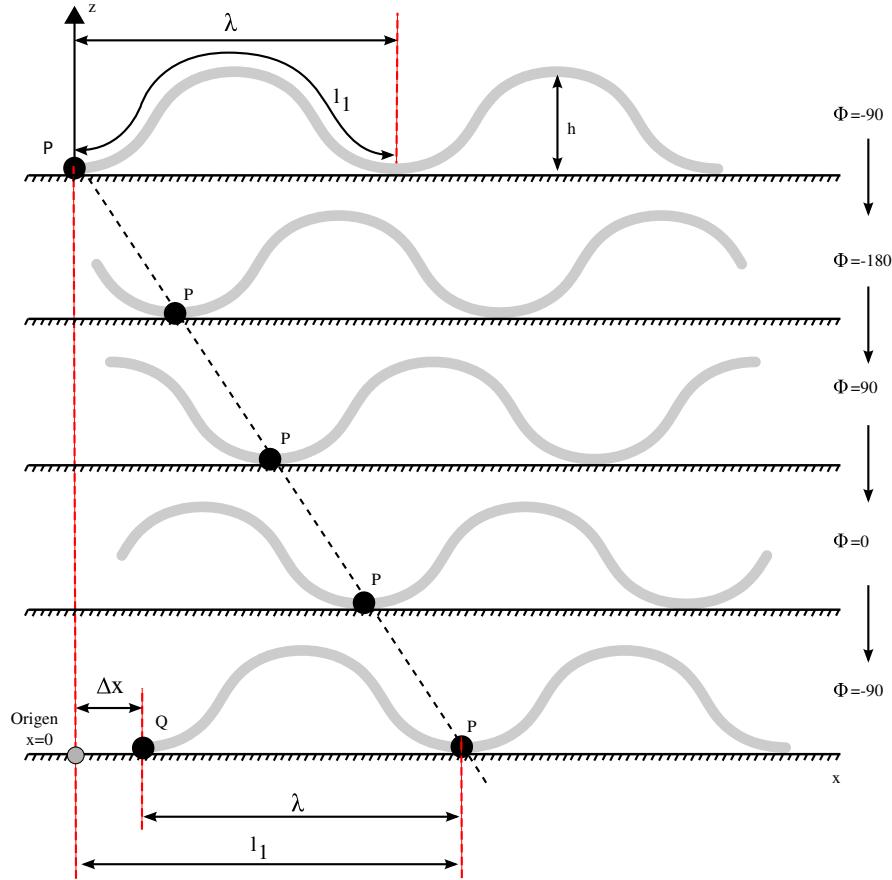


Figura 1.13: Caracterización del paso

### 1.2.6. Caracterización del paso

De todos los puntos del espacio de formas, sólo aquellos en los que se cumpla el principio de estabilidad la locomoción será estáticamente estable. Esta es la región donde se podrá conocer a priori cuál es el paso que da el robot en función los parámetros  $k$  y  $\alpha$ .

#### 1.2.6.1. Ecuación del paso

**Principio del paso:** *Si el movimiento es estáticamente estable y asumiendo que no haya deslizamiento de los puntos de apoyo, el paso del robot se calcula mediante la ecuación 1.1.*

$$\Delta x = (l - w) \frac{1}{k} = \frac{l}{k} - \lambda = l_1 - \lambda \quad (1.1)$$

donde  $l$  es la longitud del robot,  $w$  la anchura y  $k$  el número de ondulaciones. La deducción se muestra gráficamente en la figura 1.13 donde se ha representado el avance del robot en cinco fases diferentes

y con  $k = 2$ . El razonamiento es el mismo cuando  $k > 2$ .

Se parte de un robot con fase inicial de -90 grados. El parámetro  $l_1$  es la longitud de una ondulación y es igual a  $l/k$ . La longitud de onda  $\lambda$  es la anchura de una ondulación. Es igual a  $w/k$  (ec. ??).  $P$  es el punto de contacto con el suelo que inicialmente está en el extremo izquierdo. Al variar la fase, este punto se desplaza hacia la derecha.

Asumiendo que **no hay deslizamiento**, transcurrido un ciclo, el punto  $P$  se habrá desplazado una distancia igual a la longitud de la ondulación ( $l_1$ ). Aparece un nuevo punto de apoyo izquierdo  $Q$  situado en la abscisa  $l_1 - \lambda$ . La distancia que se ha desplazado el extremo izquierdo del robot durante un ciclo es  $\Delta x$ , que es la abscisa del punto  $Q$ , por lo que  $\Delta x = l_1 - \lambda$ . Poniendo  $l_1$  y  $\lambda$  en función de  $l$  y  $k$  se obtiene la ecuación final 1.1.

### 1.2.6.2. Paso normalizado

Definimos el paso normalizado  $\Delta x_n$  como la distancia que avanza un robot de longitud unitaria. Se obtiene a partir de la ecuación 1.1 sustituyendo  $l$  por 1:

$$\Delta x_n = \frac{1}{k} (1 - w_n) \quad (1.2)$$

donde  $w_n$  es la anchura normalizada. El cálculo del paso para un robot de longitud genérica  $l$  es proporcional al paso normalizado:

$$\Delta x = l \Delta x_n$$

La ecuación 1.2 se puede reescribir poniéndola exclusivamente en función del punto de trabajo como:

$$\Delta x_n = \frac{1}{k} \left( 1 - \int_0^1 \cos(\alpha \cos(2\pi s)) ds \right) \quad (1.3)$$

### 1.2.6.3. Espacio de formas y paso

La ecuación 1.3 asocia un paso a cada uno de los puntos de trabajo del espacio de formas. Puesto que sólo podemos conocer a priori el paso de los movimientos que son estáticamente estables, restringimos el espacio de formas a los puntos donde se cumpla el criterio de estabilidad, con  $k \geq 2$ .

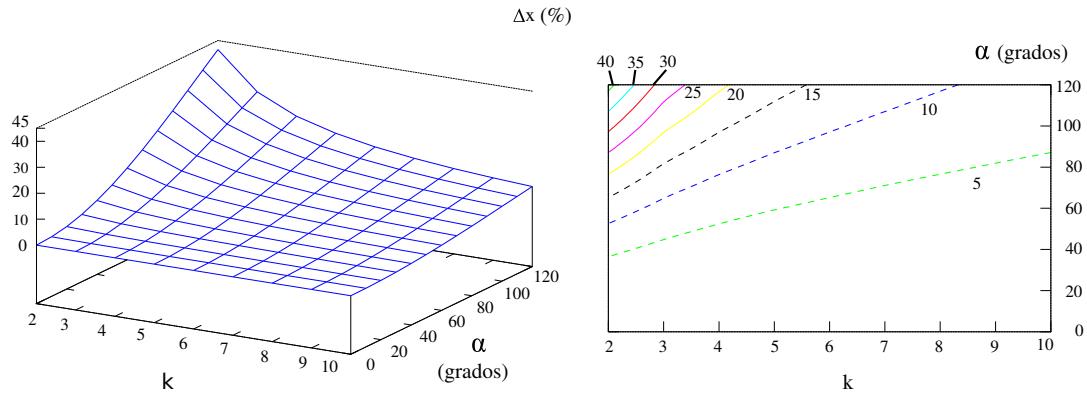


Figura 1.14: Paso normalizado de un robot ápodo continuo en función del punto de trabajo  $(k, \alpha)$

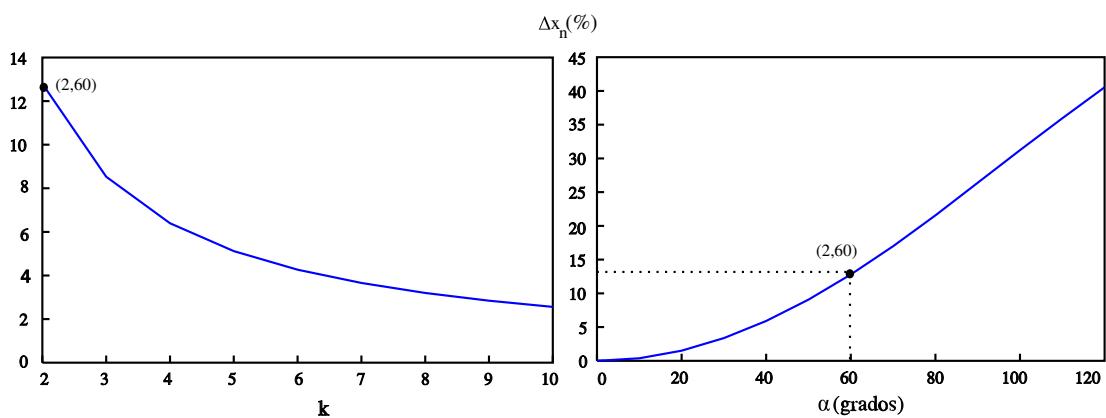


Figura 1.15: Paso normalizado del punto de trabajo  $(2, 60)$  y sus variaciones con  $k$  y  $\alpha$ .

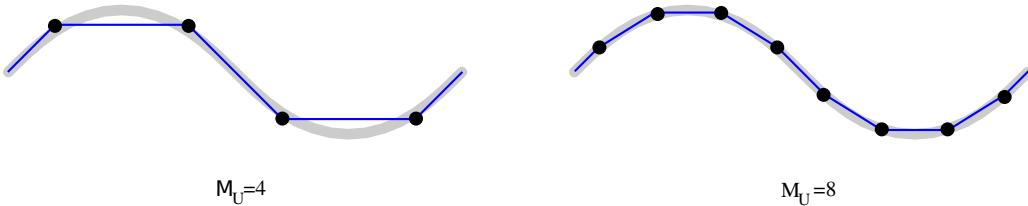


Figura 1.16: Comparación de una curva serpantinoide continua con sus equivalentes discretos de 4 y 8 módulos por ondulación

La representación del paso para los puntos del espacio de formas con valores  $k \geq 2$  se muestra en la figura 1.14. El valor máximo de  $\Delta x$  es aproximadamente del 45 % de la longitud y se obtiene para el punto de trabajo (2, 120). Es decir. **El paso será mayor cuanto mayor sea  $\alpha$  y menor  $k$ .**

En la figura 1.15 se muestra el punto de trabajo (2, 60) y su variación con  $k$  y  $\alpha$ . La variación de  $\alpha$  entre 60 y 120 es bastante lineal.

### 1.3. Modelo discreto

#### 1.3.1. Introducción

Los robots ápodos reales son de naturaleza discreta. Están formados por la unión de  $M$  módulos. Los modelamos utilizando los mismos parámetros que en el caso continuo: ángulo de serpenteo  $\alpha$  y número de ondulaciones  $k$ . El modelo matemático que usamos es el de una curva/onda serpantinoide discreta, introducido en el apartado ??.

En el modelo continuo, las articulaciones están separadas una distancia infinitesimal y existe un número infinito de ellas. Sin embargo, en el modelo discreto existen  $M$  módulos, separados por una distancia  $d$  fija. La forma y propiedades del robot dependen, además, del número  $M$  de módulos que lo forman. Para estudiar las formas básicas definimos un nuevo parámetro, **el número de módulos por ondulación:**

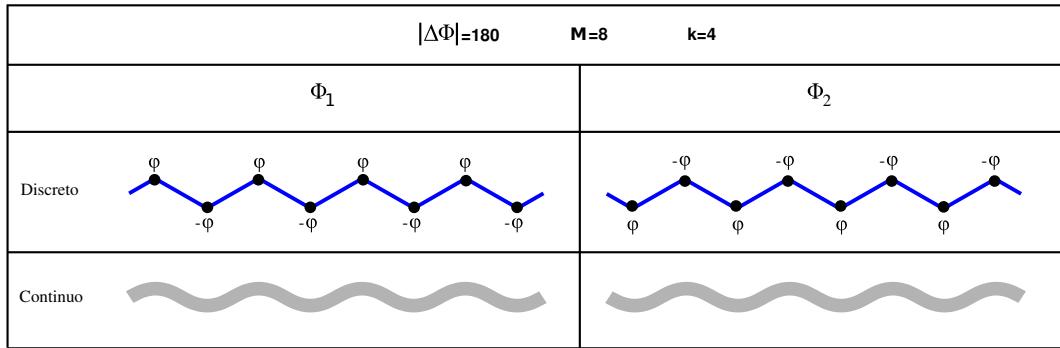
$$M_u = \frac{M}{k} \quad (1.4)$$

El parámetro  $M_u$  es el que define la forma de las ondulaciones del robot. Así, las ondulaciones de un robot con  $M = 8$  y  $k = 2$  serán iguales a las de otro con  $M = 4$  y  $k = 1$ . Ambos con  $M_u = 4$ .

En la figura 1.16 se muestra un curva serpentine continua a la que se le han superpuesto dos serpentoides discretas, una con cuatro módulos por ondulación y otra con ocho. Cuanto mayor sea  $M_u$ , más se parecerá el modelo discreto al continuo.

| Parámetro    | Descripción                      | Rango   |
|--------------|----------------------------------|---|
| $\Delta\phi$ | Variación de fase                | $\Delta\phi \in [-180, 180]$                          |
| $M$          | Número de módulos                | $M \geq 2$  |
| $M_u$        | Número de módulos por ondulación | $M_u \in [2, M]$                                      |
| $k$          | Número de ondulaciones           | $k \in [1, M/2]$                                      |
| $A$          | Amplitud de los generadores      | $A \in [0, A_{max}], A_{max} \leq 90,$                |
| $\alpha$     | Ángulo de serpenteo              | $\alpha \in [0, \alpha_{max}], \alpha_{max} \leq 120$ |

Cuadro 1.11: Parámetros y sus rangos de valores para el modelo de robot ápodo discreto

Figura 1.17: Forma de los robots para  $|\Delta\phi| = 180$  en las fases donde el ángulo de doblaje es máximo

Debida a esta discretización, aparecerán limitaciones en los valores de  $\alpha$  y  $k$ . Además, **la forma de la onda durante la propagación no será constante**, a diferencia del caso continuo.

Para el estudio de las propiedades de locomoción de los robots ápodos discretos supondremos que hay  $M$  bloques, cada uno con 1 articulación de cabecero (bloques módulo). El valor del par de parámetros  $d_0$  y  $d$  será por tanto  $L/2$  y  $L$  respectivamente (ver tabla ??). Para el estudio de las propiedades de la locomoción en línea recta de los robots del grupo cabeceo-viraje, los resultados de este capítulo se podrán aplicar directamente rehaciendo los cálculos usando los valores de  $d_0$  y  $d$  correspondientes.

Denominaremos robot ápodo discreto normalizado como aquel que tiene  $d = 1$ . Todas las gráficas las obtendremos en estos casos.

### 1.3.2. Diferencias con el modelo continuo

En el modelo discreto aparecen limitaciones en los valores de sus parámetros, que se resumen la tabla 1.1. Las analizaremos en los siguientes apartados.

#### 1.3.2.1. Limitaciones del incremento de la fase ( $\Delta\Phi$ )

En el modelo continuo, las articulaciones están separadas por una distancia infinitesimal  $ds$  y por tanto, la diferencia de fase entre los puntos  $s$  y  $s + ds$  es también infinitesimal ( $\Delta\phi \rightarrow 0$ ). Sin embargo,

en el modelo discreto esta diferencia de fase está dada por la ecuación ???. Depende del número de módulos ( $M$ ) y de las ondulaciones ( $k$ ). Si esta ecuación la reescribimos en función del parámetro  $M_u$  y expresamos la diferencia de fase en grados, tenemos:

$$|\Delta\phi| = \frac{360}{M_u} \quad (1.5)$$

Por la definición de  $\Delta\phi$ , su rango de valores están comprendido entre -180 y 180 grados. Cuando  $|\Delta\phi| = 180$ , las articulaciones consecutivas están en oposición de fase y por tanto sus ángulo de doblaje cumple que  $\varphi_i = -\varphi_{i+1}$ . En la figura 1.17 se muestra la forma que tienen dos robots discretos cuando  $|\Delta\phi| = 180$  para las fases donde el ángulo de doblaje es máximo. En estas condiciones todas las articulaciones tienen el mismo valor absoluto, pero con signos contrarios. El robot está formado por triángulos isósceles encadenados. Se ha representando un robot de 8 módulos, con cuatro ondulaciones. En la parte inferior se han dibujado las curvas serpentinoides continuas equivalentes.

### 1.3.2.2. Limitaciones de $M_u$

Sustituyendo el valor  $|\Delta\phi| = 180$  en la ecuación 1.5 obtenemos que el número mínimo de módulos por ondulación  $M_u$  es igual a 2. En esa situación ( $M_u = 2$ ) el robot tiene la forma mostrada en la figura 1.17 ( $M_u = M/k = 8/4 = 2$ ).

El valor máximo de  $M_u$  es igual al número de módulos. Se obtiene para  $k = 1$ . En el modelo teórico, podrá haber tantos módulos por ondulación como se quiera, ya que  $M$  se podrá hacer todo lo grande que se quiera. Sin embargo, la limitación en la práctica vendrá dada por el par máximo de los servos empleados en la implementación del gusano. A mayor  $M_u$ , más módulos tendrán que ser levantados, requiriéndose un par más alto.

En esta tesis nos centramos sólo en la cinemática y no tendremos en consideración el par de los motores, que supondremos que puede ser infinitamente grande. Por ello, el rango de valores del número de módulos por ondulación es  $M_u \in [2, M]$ .

### 1.3.2.3. Limitación de $k$

Al aumentar el número de ondulaciones, el valor de  $M_u$  disminuye, ya que  $M$  es constante (ec. 1.4). Por tanto, el valor máximo de  $k$  está dado por:

$$k_{max} = \frac{M}{M_{u_{min}}} = \frac{M}{2}$$

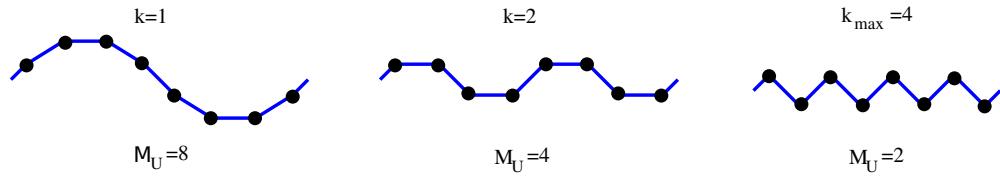


Figura 1.18: Forma de un robot ápodo de  $M$  módulos para  $k$  igual a uno, dos y cuatro. No puede tener más de cuatro ondulaciones.

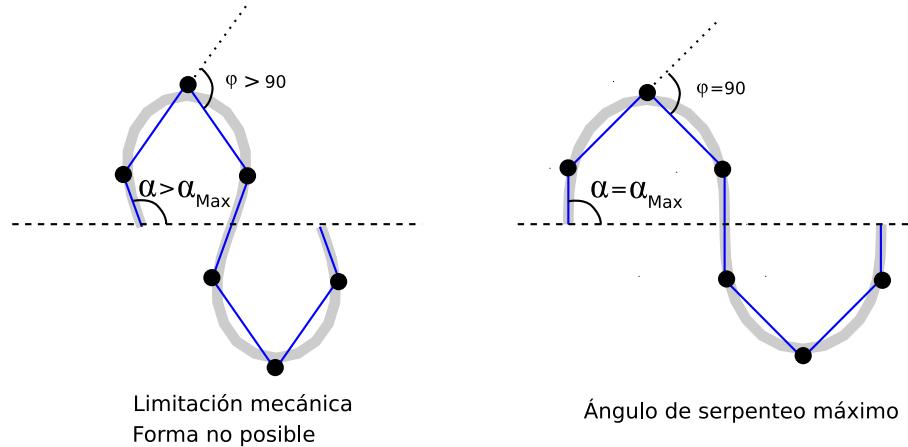


Figura 1.19: Limitación por el ángulo de doblaje máximo

En la figura 1.18 se muestra un robot de 8 módulos con 1, 2 y 4 ondulaciones. No puede haber más de 4 ondulaciones.

Al ser  $k$  y  $M_u$  inversamente proporcionales, cuanto mayor sea  $k$ , menor número de módulos habrá en cada ondulación y por tanto mayor será el error de discretización. Es decir, mayor será la diferencia entre la curva serpentinoide continua y discreta.

#### 1.3.2.4. Limitaciones mecánicas

En el modelo continuo, por la geometría de la curva serpentinoide, el ángulo de serpenteo no puede superar los 120 grados. Si se sobrepasa este valor habrá una colisión entre puntos de la misma curva. En el modelo discreto, además, existe una limitación en el valor máximo del ángulo de doblaje, que no puede superar los 90 grados, debido al tope mecánico de los servos usados para su implementación. Por tanto, el parámetro  $A$  siempre deberá cumplir que  $A \leq 90$ . Tenemos, entonces, dos limitaciones:

- **Limitación por el servo.** El ángulo de doblaje del servo nunca puede ser mayor que su tope mecánico. ( $A \leq 90$ )
- **Limitación por geometría.** El ángulo de serpenteo  $\alpha$  nunca podrá ser mayor que 120.

Además, los parámetros  $A$  y  $\alpha$  están ligados por la ecuación ???. La limitación en un parámetro afectará al otro y vice-versa. Así, en general tendremos en el modelo discreto las siguientes restricciones:

$$\alpha \leq \alpha_{max} \leq 120$$

$$A \leq A_{max} \leq 90$$

En la figura 1.19 se muestra gráficamente una situación en la que hay limitación por el servo. En la izquierda se ha dibujado una forma que NO es posible, en la que  $\alpha > \alpha_{max}$  y por tanto se viola la limitación mecánica de una de las articulaciones y  $\varphi > 90$ , lo cual no es posible. En el robot de la derecha, el valor de  $A$  es 90 por lo que existe al menos un ángulo de doblaje para una fase dada en la que  $\varphi$  será 90. Esto limita el ángulo de serpenteo a un valor inferior a su tope de 120.

Por tanto, no todos los puntos de los espacios de control  $H_1$  y de formas  $h_1$  son válidos, sino sólo aquellos que se encuentren en las regiones para las cuales  $A \in [0, A_{max}]$  y  $\alpha \in [0, \alpha_{max}]$ . En el resto de puntos se estará violando alguna de las limitaciones anteriores.

### 1.3.2.5. Regiones de limitación

Los parámetros  $A_{max}$  y  $\alpha_{max}$  dependen de  $M_u$  y están dados por las siguientes ecuaciones:

$$\alpha_{max} = \begin{cases} \frac{45}{\sin(\frac{\pi}{M_u})} & M_u \leq M_{uL} \\ 120 & M_u > M_{uL} \end{cases} \quad (1.6)$$

$$A_{max} = \begin{cases} 90 & M_u \leq M_{uL} \\ 240 \sin\left(\frac{\pi}{M_u}\right) & M_u > M_{uL} \end{cases} \quad (1.7)$$

La constante  $M_{uL}$  divide el rango de  $M_u$  en dos regiones, en cada una de las cuales aparece una limitación. Está dada por la expresión:

$$M_{uL} = \frac{\pi}{\arcsin\left(\frac{3}{8}\right)} \approx 8,2$$

Cuando  $M_u < M_{uL}$ , la limitación es debido a los servos. En esta región  $A_{max} = 90$  y  $\alpha_{max}$  será siempre inferior a 120 grados. Es el ejemplo mostrado en la figura 1.19. El robot de la derecha tiene una

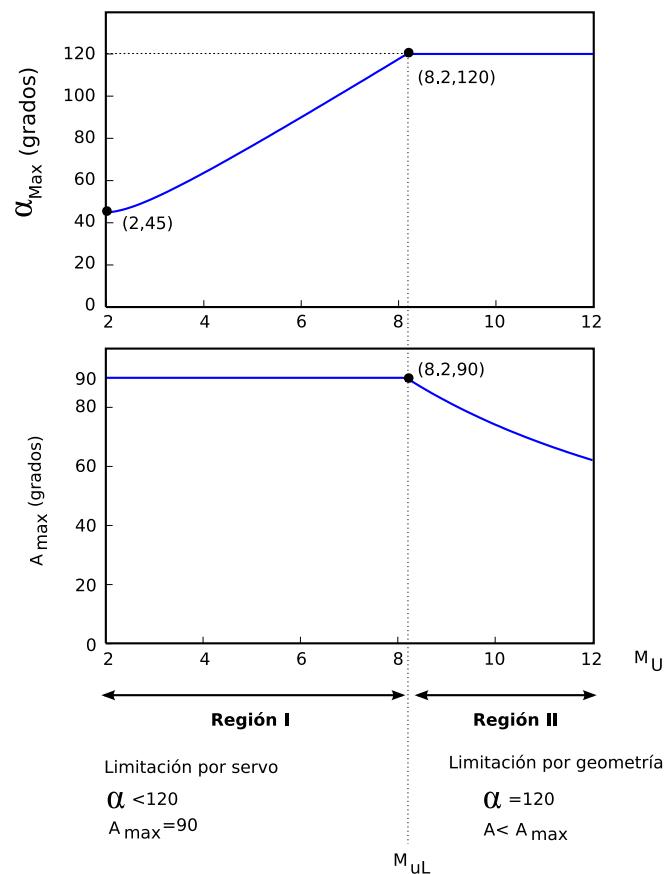


Figura 1.20: Representación gráfica de  $\alpha_{max}$  y  $A_{max}$  en función de  $M_u$ . Se muestran las dos regiones de limitación

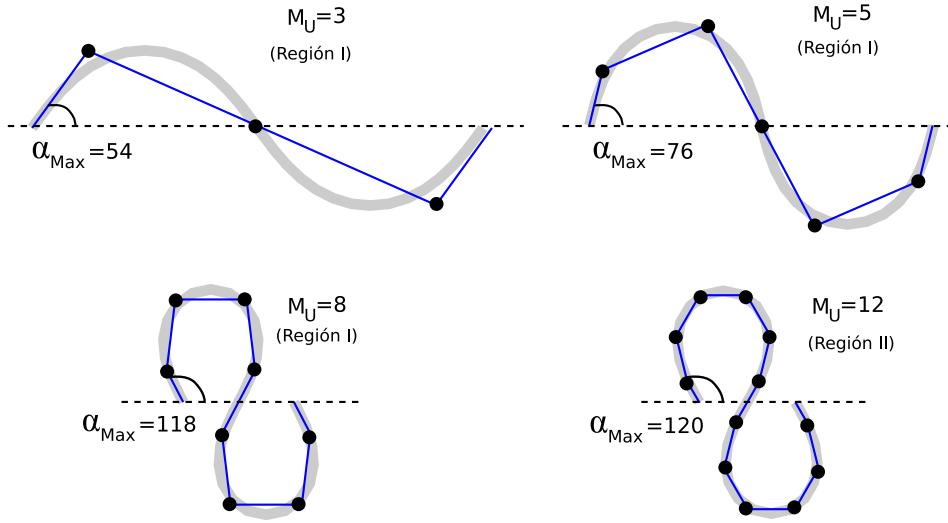


Figura 1.21: Representación gráfica del ángulo de serpenteo máximo para cuatro valores de  $M_u$ .

articulación con un ángulo de doblaje igual a 90. Esto limita el valor máximo de  $\alpha$ . Si se aumentase  $\alpha$ , esta articulación tendría un ángulo mayor de 90, lo cual no es posible por el tope mecánico.

En la región  $M_u > M_{uL}$ , la limitación es debida a la geometría. En ella  $\alpha_{max} = 120$  y  $A_{max} < 90$ . Si se aplican amplitudes mayores que  $A_{max}$ , habrá colisión entre partes del robot y se violará la restricción  $\alpha \leq 120$ .

En la figura 1.20 se muestran las gráficas de  $\alpha_{max}$  y  $A_{max}$  en función de  $M_u$  así como las dos regiones de limitación. En la figura 1.21 se han representado gráficamente la forma de cuatro robots para valores de  $M_u$  de 3, 5, 8 y 12. Los tres primeros están en la región I y el último en la II.

**Deducción de las expresiones** La ecuación ?? que relaciona el parámetro  $A$  de una serpentinoide discreta con el ángulo de serpenteo  $\alpha$  se puede reescribir en función de  $M_u$  como:

$$A = 2\alpha \sin\left(\frac{\pi}{M_u}\right) \quad (1.8)$$

Despejando el ángulo de serpenteo queda:

$$\alpha = \frac{A}{2 \sin\left(\frac{\pi}{M_u}\right)}$$

$A$  y  $\alpha$  son directamente proporcionales por lo que el valor máximo de  $\alpha$  se obtiene para el valor máximo de  $A$ , que es 90. Además, siempre deberá ser menor o igual a 120 por lo que tenemos la inecuación:

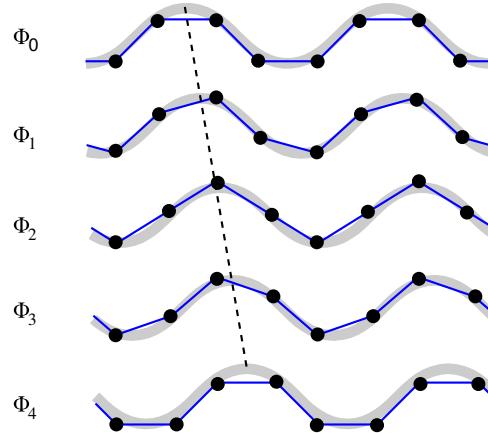


Figura 1.22: Variación de la forma de un robot ápodo con la fase

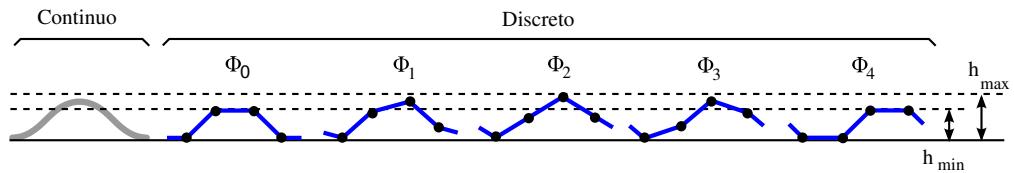


Figura 1.23: Variación de las dimensiones con la fase

$$\alpha_{max} = \frac{45}{\sin\left(\frac{\pi}{M_u}\right)} \leq 120$$

Despejando  $M_u$  obtenemos el valor de  $M_{uL}$  que delimita las dos regiones:

$$M_{uL} = \frac{\pi}{\arcsin\left(\frac{3}{8}\right)} \approx 8,2$$

Para obtener la expresión de  $A_{max}$  se particulariza la ecuación 1.8 para  $\alpha = 120$ . Será válida en la región II.

#### 1.3.2.6. Comportamiento con la fase

Otra de las diferencias entre el modelo discreto y el continuo es el comportamiento con la fase. En el modelo continuo la forma de la onda es la misma, solo que desplazada. Por tanto las dimensiones de altura y anchura de la onda permanecen constantes con la fase. Sin embargo, en el modelo discreto la orientación de los segmentos cambia con la fase. En la figura 1.22 se muestra la forma de un robot

ápodo de 8 articulaciones para diferentes fases. Se han superpuesto las curvas continua y discreta. En la fase  $\phi_0$  cada ondulación tiene una forma de trapecio. Sin embargo, en la fase  $\phi_2$  la forma es triangular.

En la figura 1.23 se muestra la forma de una ondulación de cuatro articulaciones para diferentes fases y se compara con una ondulación continua. La altura de la ondulación discreta varía entre un máximo y un mínimo que se producen en las fases  $\phi_0$  y  $\phi_2$  respectivamente.

Como indicamos en el apartado ??, definimos las dimensiones de una onda serpentinoide discreta como las máximas que alcanza al variar  $\phi$ . Al hablar de que la altura de un robot ápodo discreto es de por ejemplo 8 cm, significa que existirá al menos una fase en la que la altura tiene ese valor, aunque en el resto de fases sea menor.

### 1.3.3. Discretización

En este apartado estableceremos un criterio para comparar los modelos continuo y discreto. Primero definimos el error de discretización y luego proponemos los criterios que nos indican cuándo se puede aproximar un robot continuo por uno discreto y el error que estamos cometiendo.

La comparación la realizaremos suponiendo ondas discretas normalizadas ( $d = 1$ ) y con una única ondulación ( $k = 1$ ).

#### 1.3.3.1. Error de discretización

Dada una onda serpentinoide con ángulo de serpenteo  $\alpha$  definimos la onda serpentinoide discreta equivalente de  $M_u$  articulaciones como aquella que tiene el mismo parámetro  $\alpha$ .

La comparación de las ondas discretas y continuas la haremos en base a la diferencia en sus dimensiones en el caso peor. Tomaremos como referencia las dimensiones del continuo y referiremos a él las del discreto expresando el error en tanto por ciento relativo. Las dimensiones normalizadas para el modelo continuo y discreto dependen del ángulo de serpenteo. El caso peor es en el que la curvatura es mayor, que se produce cuando el ángulo de serpenteo es el máximo posible ( $\alpha = \alpha_{max}$ ).

Definimos el **error en la altura**,  $\varepsilon_h$ , de la siguiente manera:

$$\varepsilon_h = \frac{h_c(\alpha_{max}) - h_d(\alpha_{max})}{h_c(\alpha_{max})}$$

donde  $h_c(\alpha_{max})$  es la altura normalizada de la onda serpentinoide continua para el máximo ángulo de serpenteo y  $h_d(\alpha_{max})$  es la misma pero para el caso discreto. De manera similar definimos el **error en la anchura**:

$$\varepsilon_w = \frac{w_c(\alpha_{max}) - w_d(\alpha_{max})}{w_c(\alpha_{max})}$$

A partir de ella definimos el **error de discretización** como el valor máximo de los errores en las dimensiones:

■

$$\varepsilon_d = \max \{ \varepsilon_h, \varepsilon_{lx} \}$$

Con esta definición, al hablar de un error de discretización del 5 % estamos indicando que tanto la altura como la anchura difieren como máximo en un 5 % con respecto a las dimensiones del modelo continuo.

### 1.3.3.2. Criterio de discretización

En este apartado establecemos tres criterios para comparar el modelo discreto con el continuo según los diferentes valores del error de discretización. Son:

- **Criterio del 15 %:** Si  $M_u \geq 3$  entonces el error de discretización es menor o igual al 15 %
- **Criterio del 10 %:** Si  $M_u \geq 5$ , el error de discretización es menor o igual al 10 %
- **Criterio del 5 %:** Si  $M_u \geq 7$ , el error de discretización es menor o igual al 5 %

El criterio que emplearemos en el resto de apartados será el del 5 %. Por tanto se puede realizar la siguiente afirmación:

**Principio de discretización:** Los robots discretos que tengan un número de módulos por ondulación superior o igual a 7 se pueden aproximar por las ecuaciones continuas con un error menor del 5 % en sus dimensiones.

**Demuestra** En la gráfica de la figura 1.24 se muestran los errores de discretización ( $\varepsilon_h$  y  $\varepsilon_w$ ). A partir de ella se deducen los diferentes criterios de discretización. Se observa que el error en la anchura es siempre menor que el de la altura, por tanto, es  $\varepsilon_h$  el que determina el error de discretización. Se comprueba que para  $M_u \geq 7$ , el error de discretización es menor o igual al 5 %. El error en la anchura tiende rápidamente a 0 al aumentar  $M_u$ . El error en la altura tiende a disminuir más lentamente y con oscilaciones.

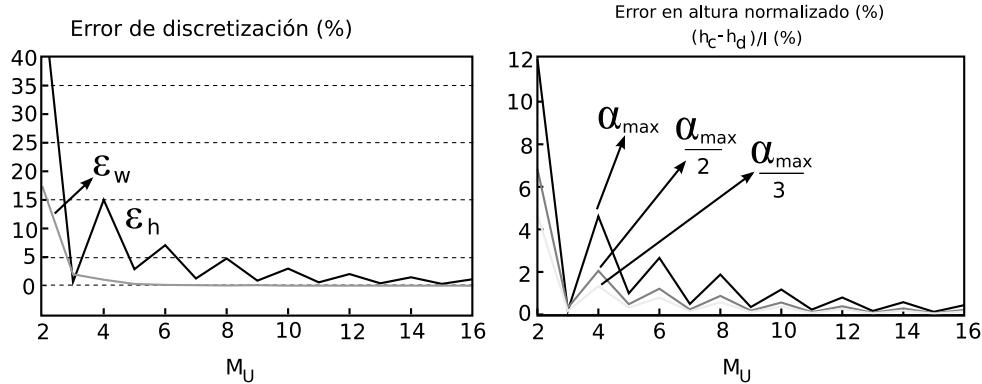


Figura 1.24: Izquierda: Error de discretización en función de  $M_u$ . Derecha: Error absoluto en la altura para diferentes valores de  $\alpha$ .

En la gráfica de la derecha de la figura 1.24 se ha representado el error absoluto en la altura normalizado con respecto a su longitud. Se puede ver cómo este error disminuye con  $\alpha$  y es máximo cuando  $\alpha$  es igual a  $\alpha_{max}$ . Si se garantiza que el error está por debajo de un umbral para  $\alpha_{max}$  entonces lo estará para cualquier  $\alpha < \alpha_{max}$ .

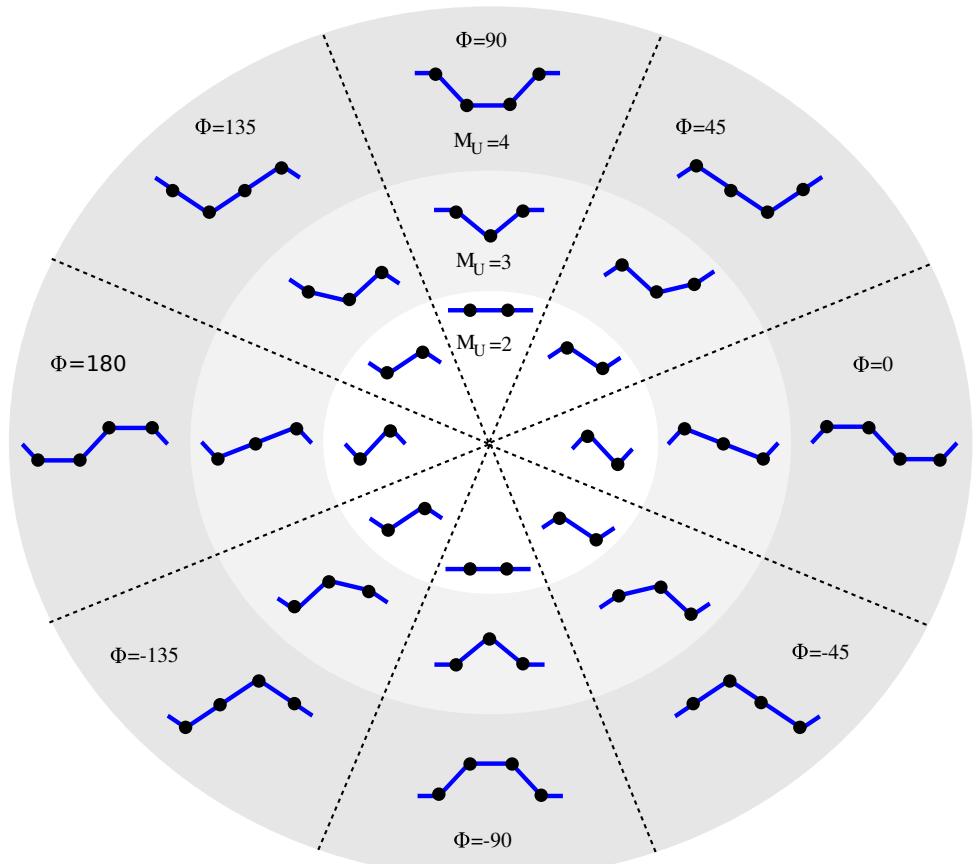
### 1.3.4. Forma

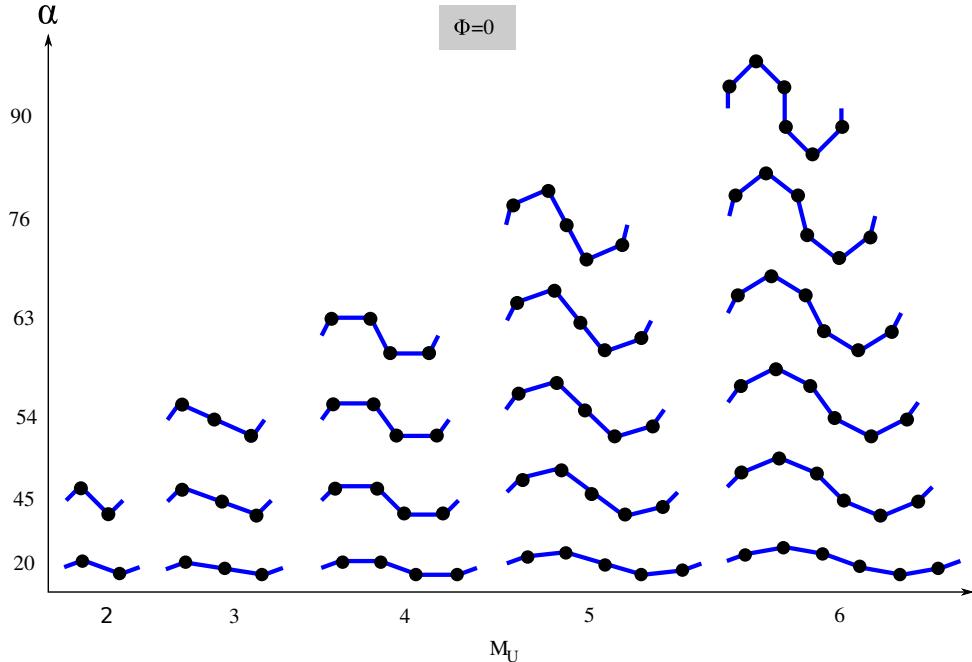
#### 1.3.4.1. Formas, fase y módulos por ondulación

Los robots ápodos discretos tiene diferentes formas según la fase. Al propagarse la onda tanto la forma del robot como sus dimensiones cambian. Esta variación con la fase se puede representar en un diagrama como el mostrado en la figura 1.25. Por un lado, al aumentar  $M_u$  la forma se parece cada vez más a la del modelo continuo. Según el criterio de discretización enunciado en el apartado 1.3.3.2, cuando  $M_u \geq 7$  la diferencia en las dimensiones es menor del 5 %. En el caso límite,  $M_u = 2$ , la variación de la fase hace que el gusano se comprima y se expanda. No hay una onda global que se propague.

#### 1.3.4.2. Formas y ángulo de serpenteo

La variación de la forma con  $\alpha$  se muestra en la figura 1.26. Como mostramos en el apartado 1.3.2.5, el valor máximo de  $\alpha$  aumenta con  $M_u$  hasta alcanzar la cota superior de 120 grados donde aparecen las limitaciones geométricas. Al aumentar  $\alpha$  manteniendo el mismo  $M_u$ , aumenta la altura y disminuye la anchura.

Figura 1.25: Variación de las formas con  $M_u$  y la fase

Figura 1.26: Variación de la forma con  $\alpha$  y  $M_u$ 

#### 1.3.4.3. Espacio de formas

Igual que en el caso continuo, las formas del robot las representaremos como puntos en el espacio de formas. Pero en el caso discreto, los puntos son los pares  $(M_u, \alpha)$ . Con ello estamos representando la forma que tiene una ondulación. Además, debido a las limitaciones mecánicas no se trata de un espacio rectangular sino de la zona comprendida entre el eje  $M_u$  y las curvas  $\alpha = \alpha_{\max}(M_u)$  y  $\alpha = 120$  (ec. 1.6).

En la figura 1.27 se muestra una región del espacio de formas y el aspecto de los robots ápodos discretos para diferentes puntos de trabajo. El valor máximo de  $M_u$  es  $M$ , que se obtiene cuando  $k = 1$  y el mínimo es 2, correspondiente a  $k = M/2$ .

#### 1.3.5. Dimensiones

En esta sección representamos gráficamente las dimensiones del robot discreto para los diferentes puntos del espacio de formas, junto con la variación con la fase. Las dimensiones obtenidas están normalizadas con respecto a la longitud de un bloque ( $d$ ) y no con respecto a la longitud total ( $l$ ) como en el caso continuo. Para obtener las dimensiones de un robot genérico, habrá que multiplicarlas por el valor de su parámetro  $d$ .

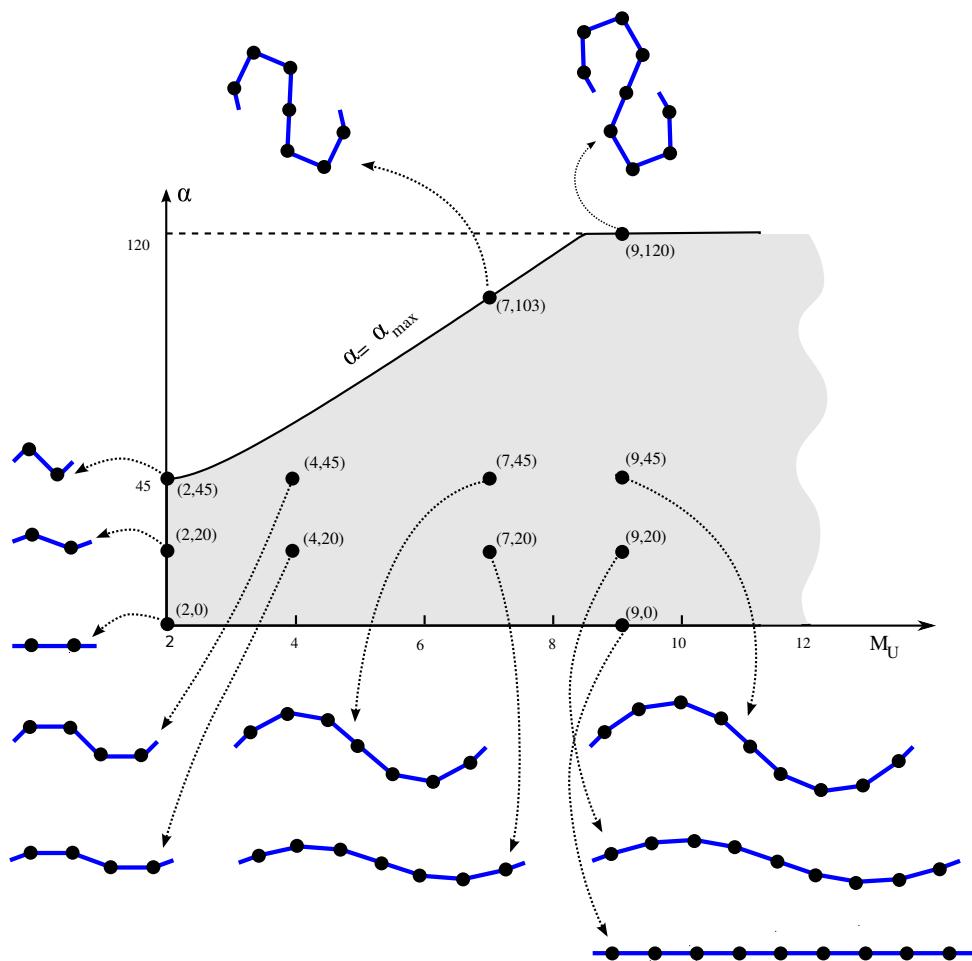


Figura 1.27: Espacio de formas de los robot ápodos discretos

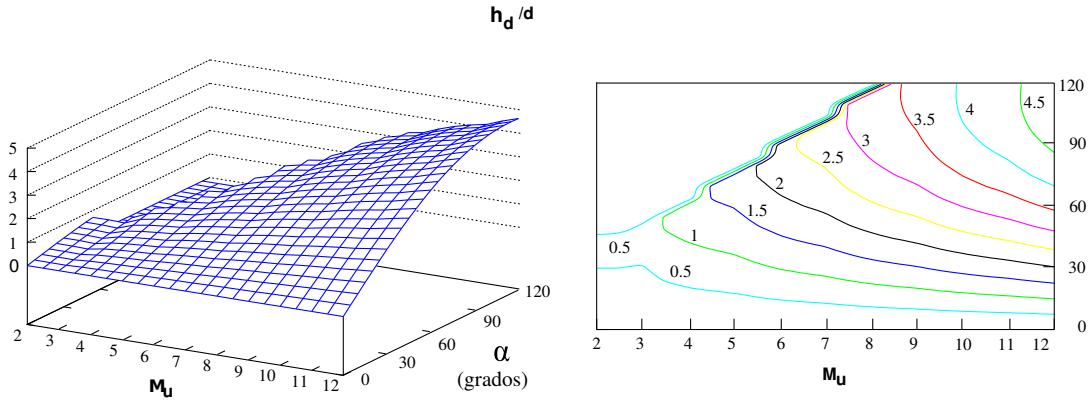


Figura 1.28: Altura máxima del robot ápodo discreto normalizado ( $h_d$ ) para cada punto del espacio de formas. La altura está normalizada con respecto a la longitud del bloque ( $d$ )

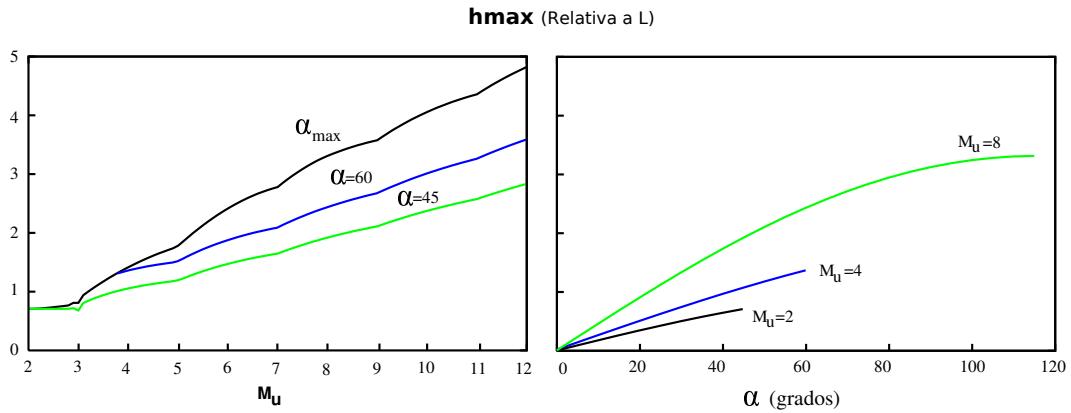


Figura 1.29: Variación de la altura en diferentes puntos de trabajo. **Izquierda:** variación con  $M_u$ , para robots con tres ángulos de serpenteo. **Derecha:** variación con  $\alpha$ , para robots con diferentes módulos por ondulación.

### 1.3.5.1. Altura

La altura de un robot ápodo discreto normalizado está dada por la ecuación ?? y se ha representado gráficamente en la figura 1.28. Por un lado la altura aumenta con  $M_u$ . Esto es lógico. A mayor número de módulos, mayor será la longitud total de una ondulación del robot y por tanto mayor será su altura. También aumenta con  $\alpha$ , como en el caso continuo.

En la figura 1.29 se muestra la variación para diferentes puntos de trabajo. En la izquierda se ha dibujado la variación con  $M_u$ , para diferentes valores del ángulo de serpenteo. En la derecha está la variación con  $\alpha$ , para robots con distintos números de módulos por ondulación.

La altura varía también con la fase. Por definición, tomamos la altura  $h_d$  como el valor máximo entre las fases (ec. ??). Denotaremos por  $h_d(\phi_{min})$  el valor mínimo. Así, la expresión  $h_d - h_d(\phi_{min})$  nos indica la variación máxima de la altura con la fase. Esta variación, relativa a la altura máxima se

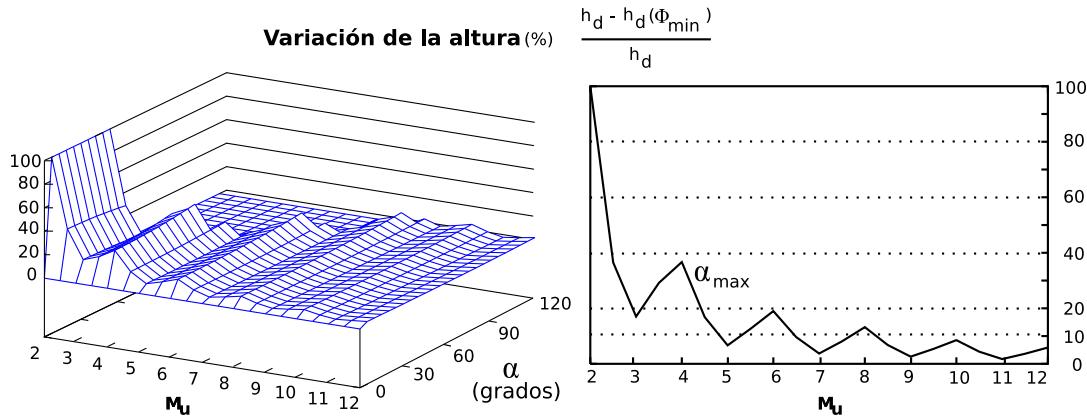
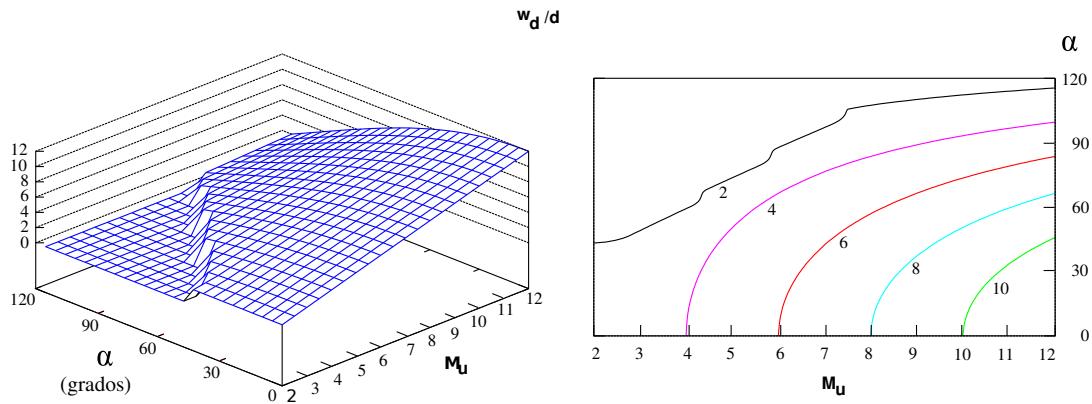


Figura 1.30: Variación de la altura

Figura 1.31: Anchura máxima del robot ápodo discreto normalizado ( $w_d$ ) para cada punto del espacio de formas. La altura está normalizada con respecto a la longitud del bloque ( $d$ )

representa gráficamente en la figura 1.30. A medida que aumenta  $M_u$  el robot discreto se approxima más al continuo y por tanto la variación de la altura va tendiendo a cero. Para valores de  $M_u$  mayores de 8, esta variación es menor del 10 %.

### 1.3.5.2. Anchura

La anchura de los robots ápodos discretos la estudiaremos para una ondulación (en este caso, la anchura será igual a la longitud de onda). Su valor está determinado por la ecuación ?? y se muestra gráficamente en la figura 1.31. Al igual que con la altura, al aumentar  $M_u$  se incrementa la anchura. También aumenta al disminuir  $\alpha$ . En el caso en que  $\alpha = 0$ , el robot es una recta situada sobre el eje  $x$  con longitud igual a  $M_u$ .

En la figura 1.32 se muestra la altura de diferentes puntos de trabajo. En la izquierda está dibujada la variación con  $M_u$  para robots con distintos valores de  $\alpha$ . En la derecha se muestra la variación con  $\alpha$

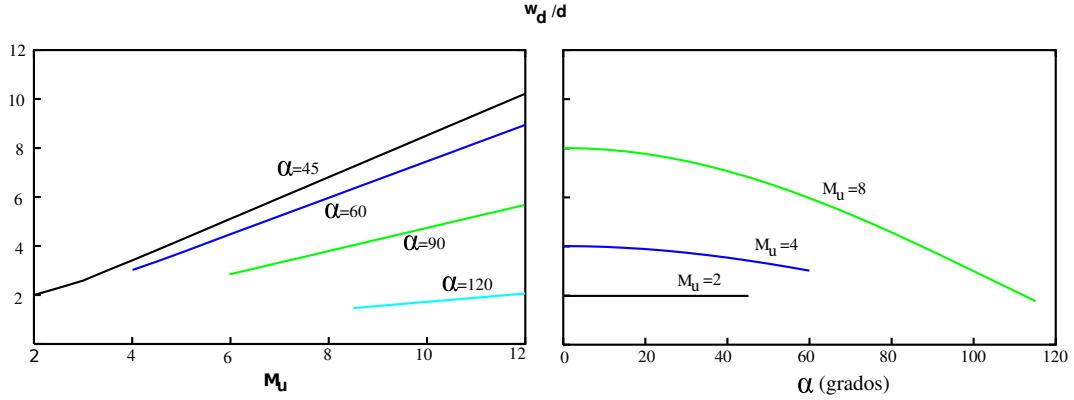


Figura 1.32: Variación de la anchura en diferentes puntos de trabajo. **Izquierda:** variación con  $M_u$ , para robots con tres ángulos de serpenteo. **Derecha:** variación con  $\alpha$ , para robots con diferentes módulos por ondulación

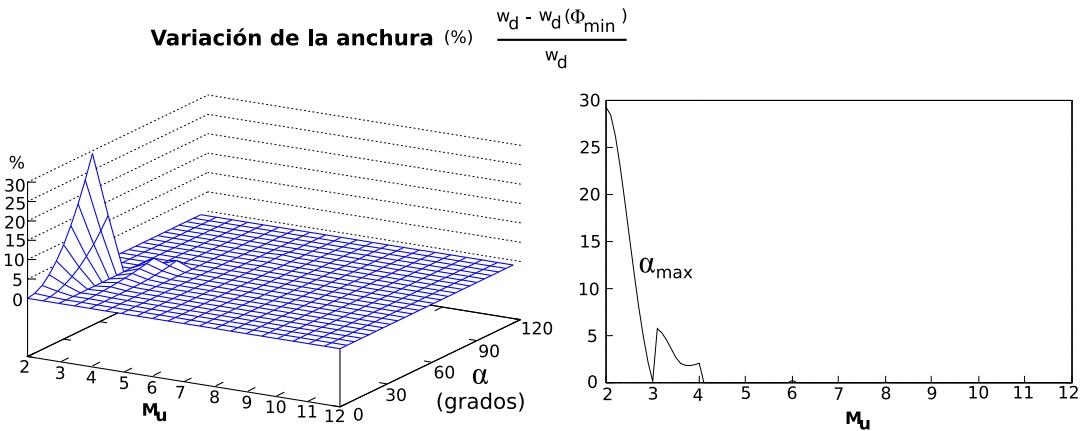


Figura 1.33: Variación de la longitud de onda

para tres robots con valores de  $M_u$  de 2, 4 y 8 respectivamente.

La anchura también varía con la fase. Definimos la variación de la anchura mediante la expresión  $w_d - w_d(\phi_{\min})$ . Nos indica la máxima variación de la anchura con la fase. Se representa gráficamente en la figura 1.33. Se observa que esta variación cae muy rápidamente con  $M_u$  y para valores superiores a 3, la variación está por debajo del 5 % (aproximadamente). Esto implica que **a partir de  $M_u \geq 3$ , la anchura permanece prácticamente constante durante la propagación de la onda**.

### 1.3.6. Estabilidad

El criterio de estabilidad obtenido para el modelo continuo (apartado 1.2.5) también se aplica en el caso del discreto. En todo momento durante la propagación de la onda deben existir al menos dos puntos de apoyo y la proyección del centro de gravedad del robot debe estar situada entre ellos. Esto

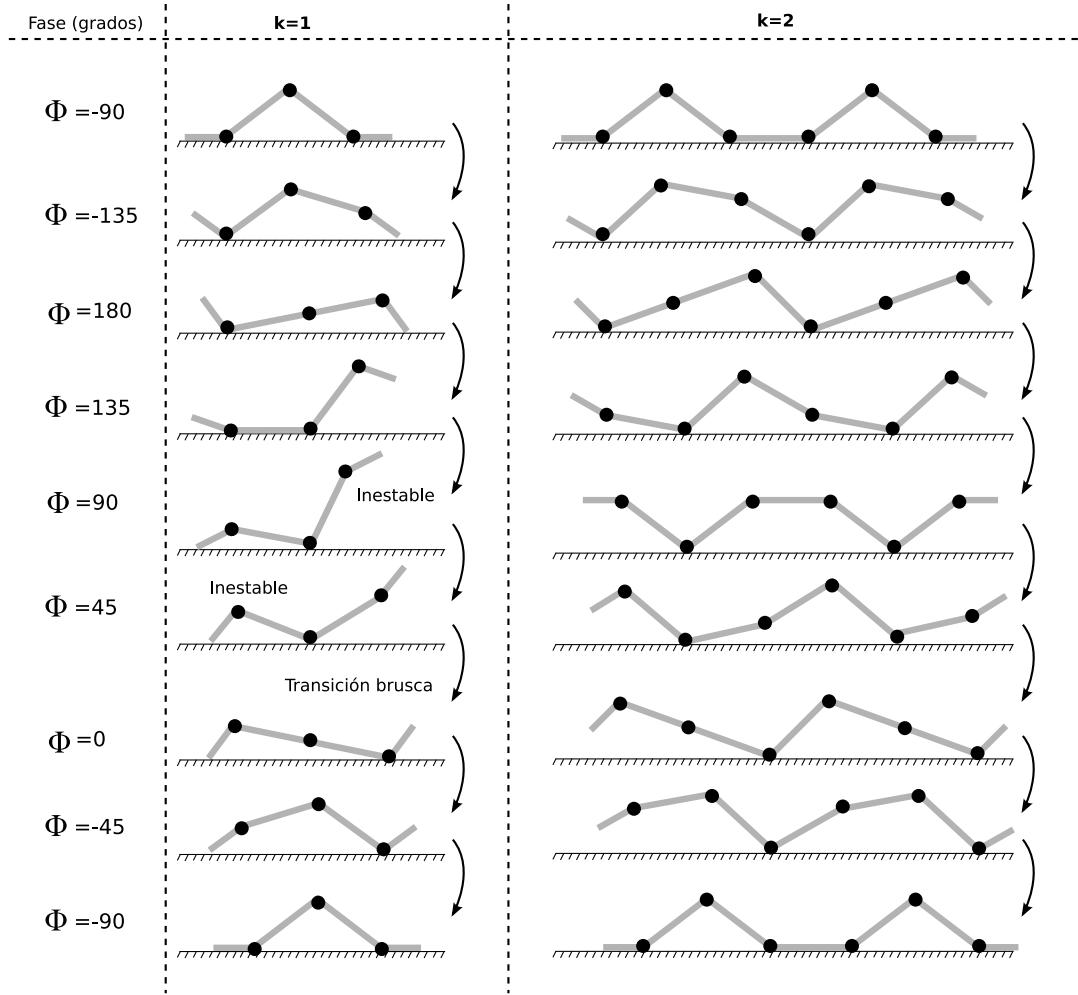


Figura 1.34: Estabilidad de un robot discreto con  $M_u = 3$  para valores de  $k$  iguales a 1 y 2

se garantiza siempre que  $k \geq 2$ . Cuando no se cumpla este criterio y  $k < 2$  existirá una fase en la que el robot sólo tendrá un punto de apoyo por lo que se inclinará hacia adelante o hacia atrás.

En la figura 1.34 se muestra esta idea aplicada a un robot ápodo con  $M_u = 3$ . Se han representado dos robots, uno con  $k = 1$  y otro con  $k = 2$  para cuatro fases diferentes y se comparan con la forma de la onda serpantinoide discreta.

En el caso  $k = 2$ , el robot tiene la misma forma que la curva discreta, pero “duplicada”. Siempre habrá al menos dos puntos de apoyo por lo que es estable en todas las fases. En el caso de  $k = 1$  existen fases inestables en las que el robot se inclina. El caso peor se produce para una fase de 90 grados, donde sólo hay un punto de apoyo situado en el centro. El robot se inclinará hacia adelante, atrás u oscilará.

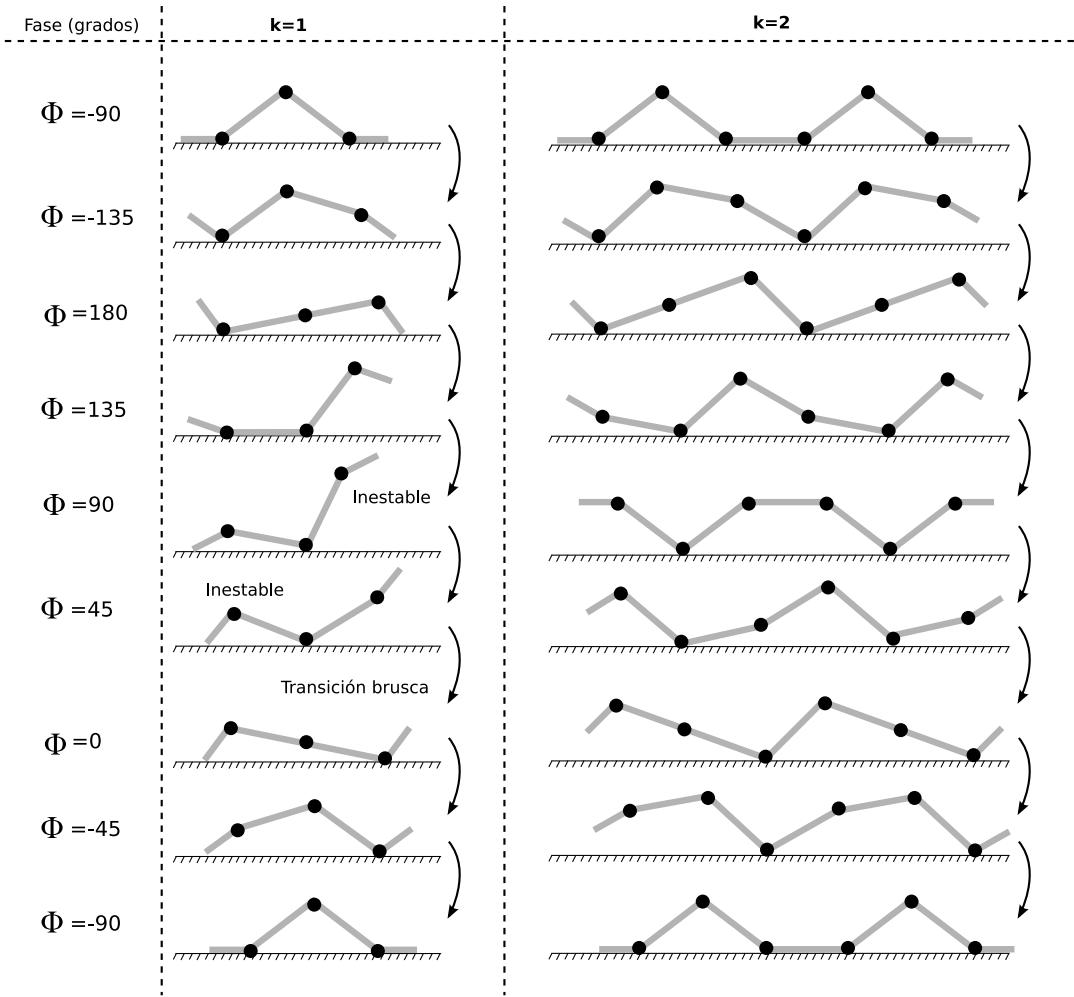


Figura 1.35: Locomoción de un gusano discreto

### 1.3.6.1. Estabilidad para $k < 2$

En la figura 1.35 se han representado los mismos robots de la figura 1.34 para 8 fases durante la propagación de la onda. En la izquierda se ve el movimiento cuando  $k = 1$  y en la derecha para  $k = 2$ . En este último, el movimiento es estáticamente estable. Sin embargo, en el primero el movimiento no es uniforme. Cuando la fase se acerca a 90 grados el robot sólo tiene un punto de apoyo por lo que se inclinará hacia la izquierda. Esta inestabilidad finaliza cuando se alcanza la fase 0 en la que la parte derecha del robot toca el suelo. Esta transición es brusca. Se combina el movimiento descendente de la primera articulación con la inclinación hacia la derecha provocada por la gravedad.

El que no se cumpla el criterio de estabilidad no implica que no exista locomoción, sino que existirán unas fases de transición más brusca que habrá que tener en cuenta. Si la locomoción se está realizando con valores de  $\alpha$  altos, la transición será muy brusca y el robot podrá sufrir daños. Sin embargo, para

valores pequeños será casi inapreciable.

### 1.3.7. Caracterización del paso

#### 1.3.7.1. Ecuación del paso

La manera de calcular el paso en los robots ápodos discretos es similar al caso continuo. Suponiendo que no existiese deslizamiento de los puntos de apoyo y que la longitud de onda se mantuviera constante durante la propagación de la onda, el paso se calcula aplicando la ecuación del caso continuo (ec. 1.1). En la figura 1.36 se muestra el desplazamiento de dos robots discretos durante un ciclo, de 3 y 4 módulos por ondulación con  $k = 2$ .

Sin embargo, al tratarse de un robot discreto **la anchura no permanece constante durante la propagación**. Para algunas fases el robot tendrá una anchura mayor que en otras. Esto significa que la distancia entre los dos puntos de apoyo, el izquierdo y el derecho varía con la fase, provocando a su vez que se deslicen sobre la superficie. En el ejemplo de la figura 1.36, durante la primera transición entre las dos primeras fases mostradas hemos asumido que los dos puntos de apoyo están situados a la misma distancia y que permanecen inmóviles con respecto al suelo. Sin embargo, esto no se cumple en general. La geometría de la curva discreta fuerza a que durante la transición entre estas dos fases esa distancia no tenga por qué ser igual. El punto de apoyo izquierdo o derecho tendrá que desplazarse (o ambos).

**Principio del paso en robots discretos** : *Si el movimiento es estáticamente estable, el número de módulos por ondulación es superior o igual a 3, y el suelo es tal que no permite el deslizamiento de los puntos de apoyo, el paso del robot se puede aproximar mediante la ecuación 1.1.*

Como mostramos en el apartado 1.3.5.2, la anchura del robot discreto varía menos del 5 % cuando  $M_u \geq 3$ . Esta variación, además, es prácticamente inexistente para valores mayores de 4. Por ello en estos casos la ecuación del paso del robot continuo es aplicable al discreto.

#### 1.3.7.2. Espacio de formas y paso

El paso de un robot discreto normalizado, para cada uno de los puntos de trabajo del espacio de formas se muestra en la figura 1.37. Se observa que aumenta con  $M_u$ : a mayor número de módulos por ondulación mayor es la longitud total y la anchura, por lo que el paso crece. Al incrementar los valores del ángulo de serpenteo, la anchura disminuye por lo que el paso también aumenta.

En la figura 1.38 se muestra el paso para diferentes puntos de trabajo. En la izquierda está dibujada la variación con  $M_u$  para robots con distintos valores de  $\alpha$ . En la derecha se muestra la variación con  $\alpha$  para tres robots con valores de  $M_u$  de 3, 4 y 8 respectivamente.

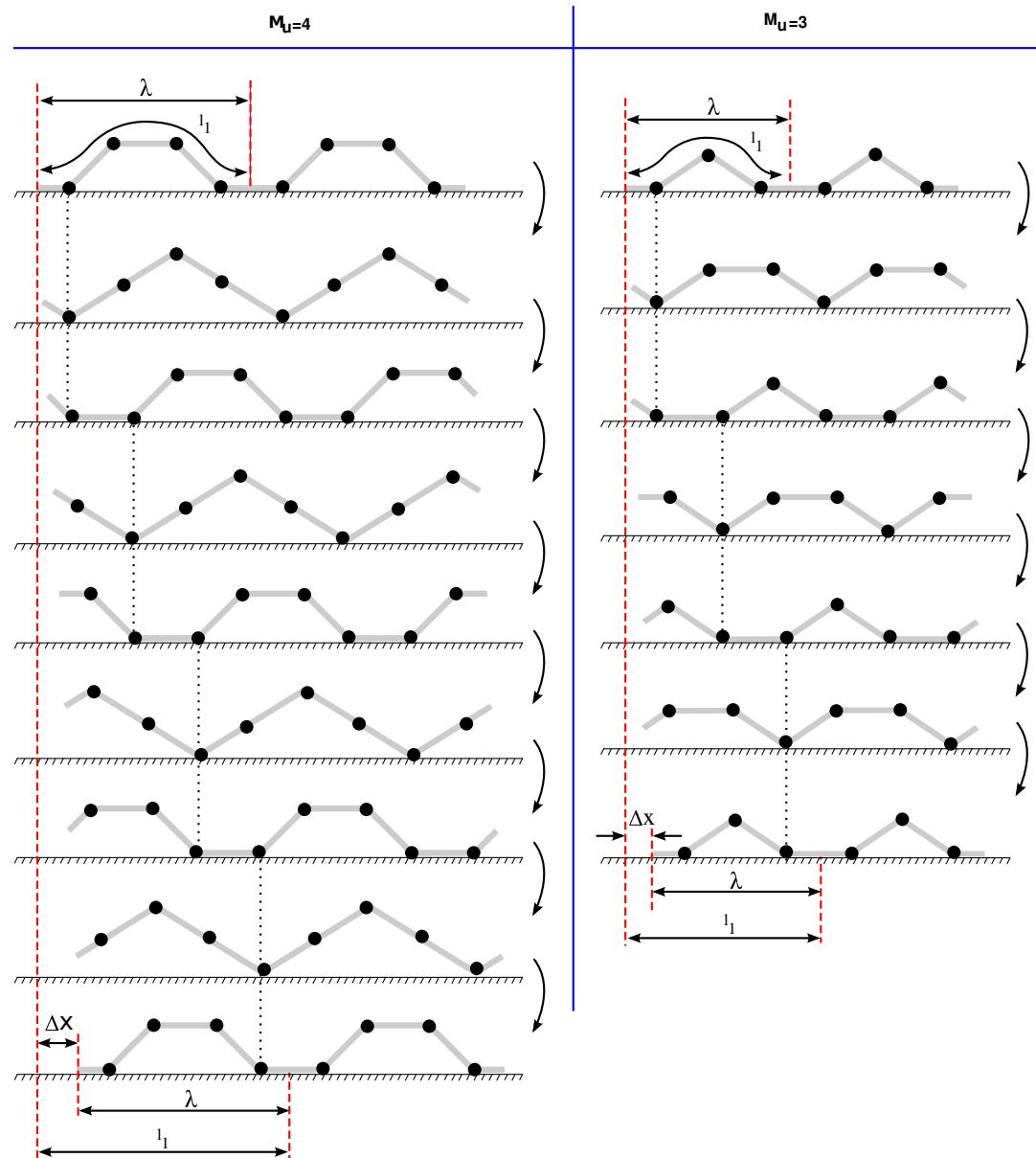


Figura 1.36: Paso dado por dos robots discretos con 3 y 4 módulos por ondulación

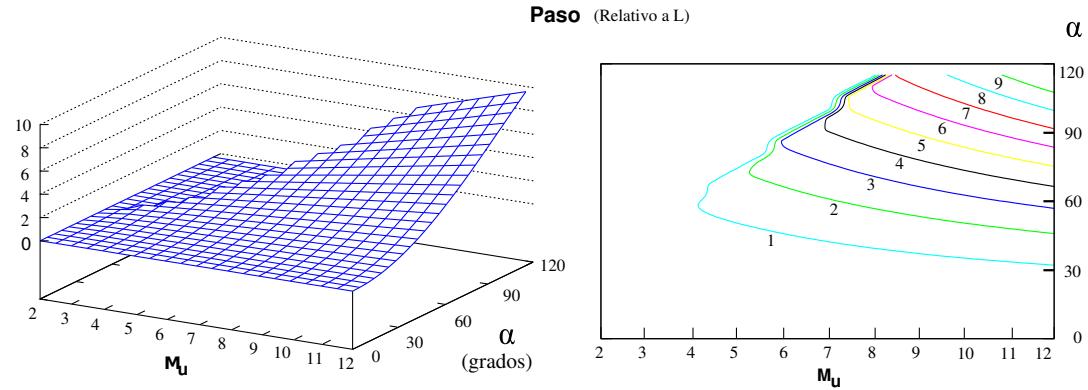


Figura 1.37: Paso del robot ápodo discreto normalizado para cada punto del espacio de formas.

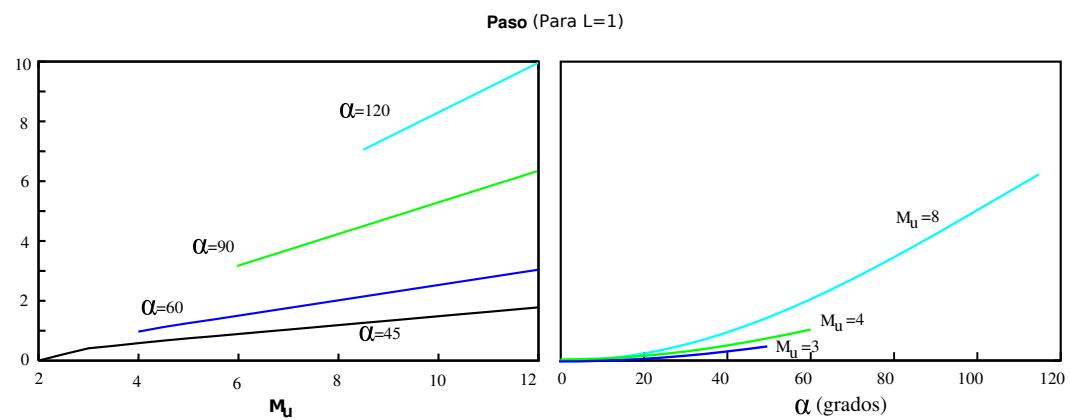


Figura 1.38: Locomoción del gusano discreto para diferentes valores de  $M_u$  y  $\alpha$

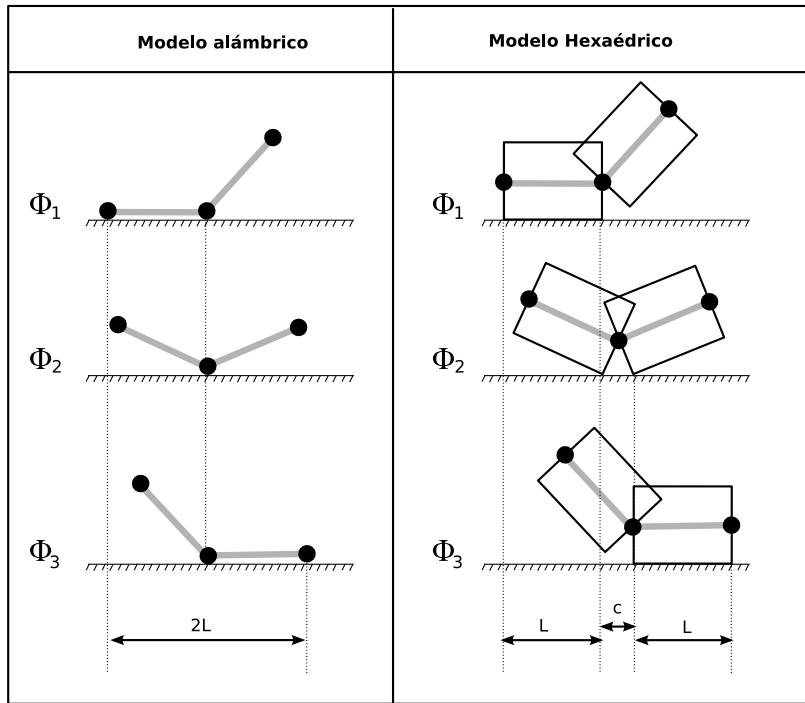


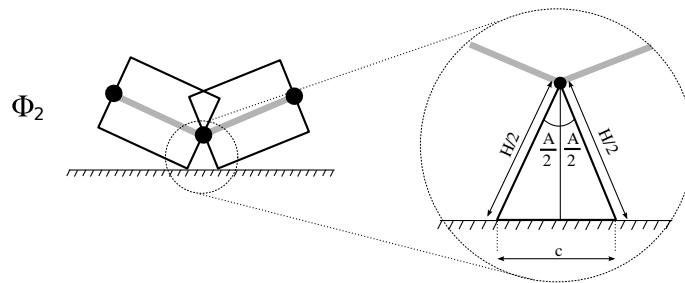
Figura 1.39: Diferencias entre la locomoción de los modelos alámbrico y hexaédrico. Se muestran sólo lo que ocurre en el desplazamiento de tres módulos situados en la parte inferior de una ondulación

### 1.3.8. Modelo hexaédrico

En este apartado veremos la relación que existe entre el modelo alámbrico y el hexaédrico y cómo se puede aplicar la ecuación para calcular el paso.

En la figura 1.39 se han dibujado tres articulaciones en las fases  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  y  $\phi_3$  durante la locomoción de un robot ápodo de  $M$  módulos. En esas fases las articulaciones mostradas están en la parte inferior de la ondulación, en contacto con el suelo. El resto de ellas no se han dibujado. En el modelo alámbrico cada articulación es el punto de apoyo sobre el que las otras articulaciones rotan. En el modelo hexaédrico, sin embargo, existe dos puntos de apoyo. Uno es sobre el que se realiza la rotación durante la transición entre  $\phi_1$  y  $\phi_2$  y el otro durante  $\phi_2$  y  $\phi_3$ . Debido a esto, la distancia entre la articulación izquierda en  $\phi_1$  y articulación derecha en  $\phi_3$  son diferentes entre ambos modelos. En el primero es igual a  $2L$ , y en el segundo a  $2L + c$ . Por tanto, para calcular el paso del robot podemos aproximar el modelo hexaédrico por uno alámbrico equivalente en el que la longitud de los módulos sea  $L + c$ . La longitud equivalente es  $l_e = M(L + c) = ML + Mc = l + Mc$ .

El valor de la constante  $c$  depende de las dimensiones del módulo hexaédrico. En la fase  $\phi_2$  es donde se verifica que el ángulo de doblaje es máximo y tiene un valor igual a la amplitud:  $\phi_i = A$ . Por ello, la constante  $c$  la calculamos como se indica en la figura 1.40, empleando la ecuación:

Figura 1.40: Cálculo de la constante  $c$  del modelo hexaédrico

$$c = H \sin \left( \frac{A}{2} \right)$$

La ecuación para el cálculo del paso del modelo hexaédrico se obtienen a partir de la ecuación 1.1 sustituyendo la longitud  $l$  por su longitud equivalente  $l_e$ :

$$\Delta x = \left( l + MH \sin \left( \frac{A}{2} \right) - w \right) \frac{1}{k} \quad (1.9)$$

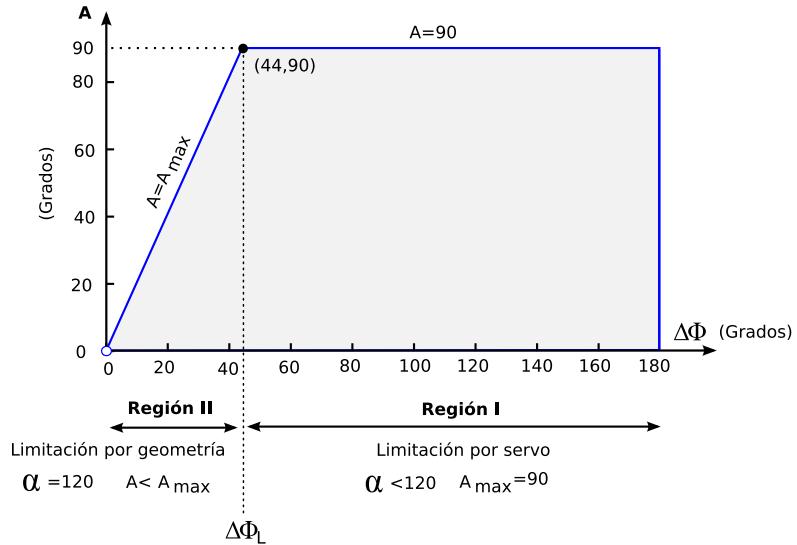
## 1.4. Cinemática

### 1.4.1. Introducción

En este apartado abordaremos el estudio de los problemas de la cinemática directa e inversa y propondremos una metodología para su solución. Parametrizaremos los espacios de control y de formas e introduciremos la idea de región de locomoción. La solución propuesta se basa en realizar transformación entre los espacios  $h_1$  y  $H_1$ .

### 1.4.2. Espacio de control

El espacio de control  $H_1$  está formado por los pares de puntos  $(\Delta\phi, A)$  que determinan los valores de la diferencia de fase y amplitud que se aplican a todos los generadores sinusoidales para el control del robot. Debido a las limitaciones mecánicas descritas en el apartado 1.3.2.4, este espacio se divide en las dos regiones de limitación I y II. A partir de la ecuación 1.5 obtenemos la diferencia de fase que limita estas dos regiones:

Figura 1.41: Representación gráfica del espacio de control  $H_1$ 

$$\Delta\phi_L = \frac{360}{M_{uL}} = 43,9 \approx 44 \quad (1.10)$$

Cuando  $\Delta\phi < \Delta\phi_L$ , la limitación es debida a la geometría y cuando  $\Delta\phi > \Delta\phi_L$  es por el tope mecánico del servo. La ecuación 1.7 para obtener  $A_{max}$  se puede reescribir como:

$$A_{max} = \begin{cases} 240 \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) & \Delta\phi < \Delta\phi_L \\ 90 & \Delta\phi \geq \Delta\phi_L \end{cases} \quad (1.11)$$

En la figura 1.41 se ha representado gráficamente el espacio de control junto con las dos regiones de limitación.

### 1.4.3. Transformación de espacios

Los problemas de la cinemática directa e inversa proponemos resolverlos mediante transformaciones entre los espacios de control y de formas. En el caso de la cinemática directa, dado un punto  $P$  del espacio de control hay que determinar cuál es su punto equivalente  $p$  en el espacio de formas. A partir de  $p$  se calculan las dimensiones del robot y el paso. Para la cinemática inversa, a partir de las restricciones en los parámetros cinemáticos y las dimensiones se obtienen las regiones en el espacio de formas y éstas se transforman en sus equivalentes del espacio de control.

En la figura 1.42 se muestran ambos espacios y la correspondencia entre los puntos  $P_i \in H_1$  y  $p_i \in h_1$ . Los puntos  $P_5$  y  $p_5$  son los que separan las dos regiones de limitación: I y II y son puntos fijos que no dependen de  $M$ . Los puntos  $P_4$ ,  $P_3$ ,  $p_4$  y  $p_3$  sí dependen de  $M$ .

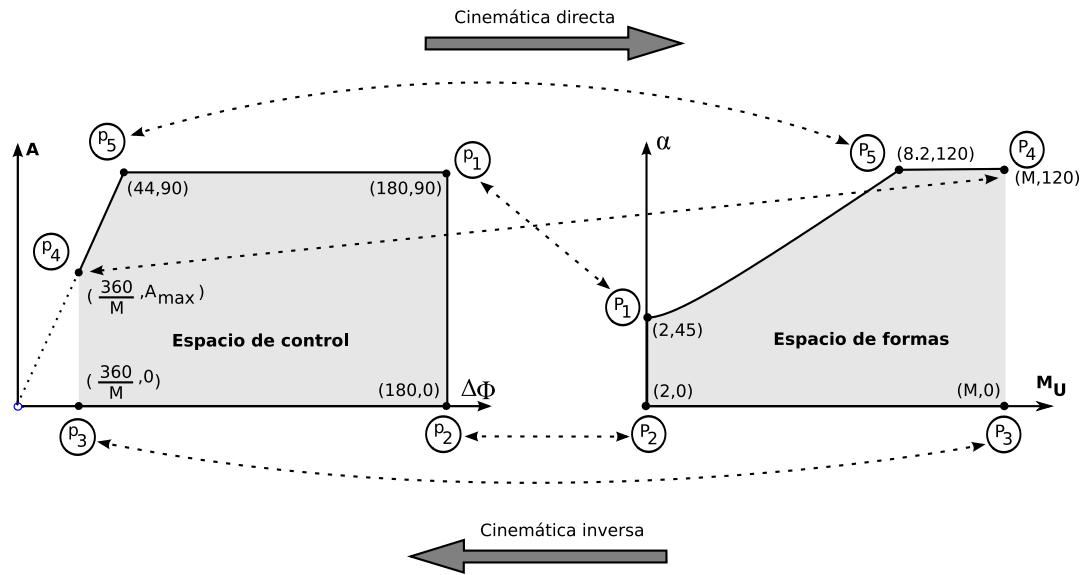


Figura 1.42: Transformación entre los espacios de control y de formas

Las ecuaciones para realizar las transformaciones ya se han presentado en apartados anteriores pero se resumen a continuación.

$$A = 2\alpha \sin\left(\frac{\pi}{M_u}\right) \quad (1.12)$$

$$|\Delta\phi| = \frac{360}{M_u} \quad (1.13)$$

#### 1.4.4. Región de locomoción

Definimos la región de locomoción como la zona interior de los espacios  $H_1$  ó  $h_1$  en la que el robot es estáticamente estable. Por el criterio de estabilidad enunciado en el apartado 1.2.5, el movimiento cumple esa propiedad si se verifica que  $k \geq 2$ .

Tanto la ecuación del paso (ec. 1.1) como las del cálculo de las dimensiones del robot (ec. ?? y ??) sólo son aplicables a los puntos situados en la región de locomoción. El movimiento del robot para los puntos situados fuera de esta región no será uniforme y habrá que estudiarlo usando otras metodologías.

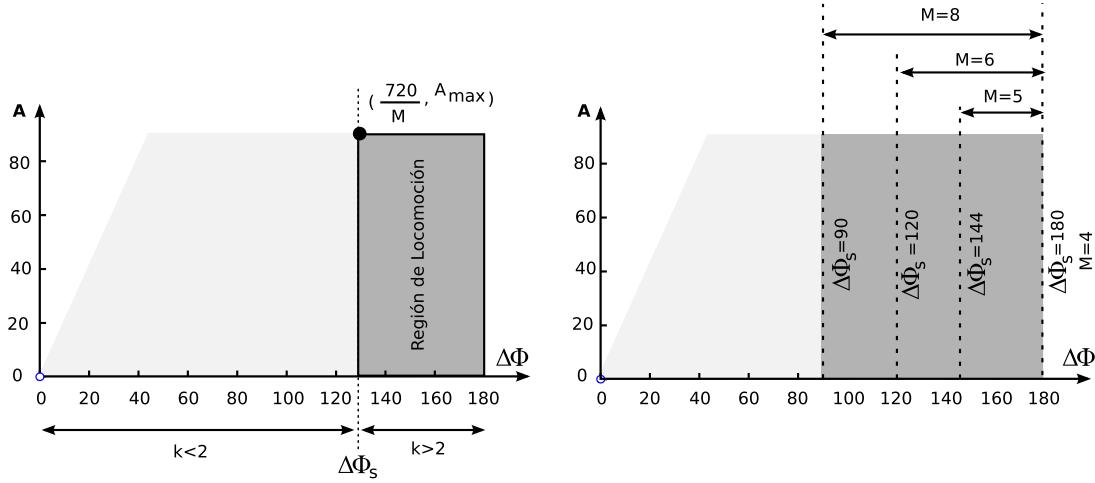


Figura 1.43: Región de locomoción en el espacio de control

#### 1.4.4.1. Región de locomoción en el espacio de control

Para  $k = 2$ , el número de módulos por ondulación es  $M/2$  y sustituyendo este valor en la ecuación 1.13 obtenemos la diferencia de fase que determina la frontera entre la región de locomoción y el resto del espacio  $H_1$ :

$$\Delta\phi_s = \frac{720}{M} \quad (1.14)$$

Todos los puntos para los que  $\Delta\phi > \Delta\phi_s$  pertenecen a la región de locomoción y por tanto la locomoción del robot será estáticamente estable. En la parte izquierda de la figura 1.43 se muestra el espacio  $H_1$  y la región de locomoción. En la parte de la derecha se han dibujado las cuatro regiones de locomoción correspondientes a robots con 4, 5, 6 y 8 módulos. Se puede ver cómo la región aumenta con  $M$ . Si el robot tiene sólo 4 módulos, esta región es sólo una línea vertical. Si el número de módulos fuese infinito, la región de locomoción sería todo el espacio  $H_1$ .

#### 1.4.4.2. Región de locomoción en el espacio de formas

El criterio de estabilidad se cumple para todos los puntos de  $h_1$  en los que  $M_u < M/2$ . La región de locomoción se muestra gráficamente en la figura 1.44. Está comprendida entre los valores de  $M_u$  igual a 2 y  $M/2$ . A medida que aumenta  $M$  esta zona crece y se va expandiendo hacia la derecha. El espacio  $h_1$ , como vimos en el apartado 1.3.2.4, está dividido en las dos subregiones de limitación I y II. Cuando se cumpla que  $M/2 < M_{uL}$ , la región de locomoción está en el interior de la región de limitación I, es decir, que hay limitación por el tope mecánico de los servos y el ángulo de serpenteo

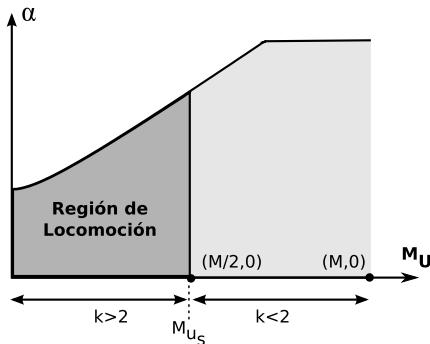


Figura 1.44: Región de locomoción en el espacio de formas

$\alpha$  nunca superará su valor máximo de 120 grados. Cuando  $M/2 > M_{uL}$  la región de locomoción comprende la región I completa y parte de la II.

El valor de  $M_u$  que separa la región de locomoción de la región en la que  $k < 2$  lo denotaremos por  $M_{u_s}$  y como hemos visto, es igual a  $M/2$ .

### 1.4.5. Cinemática directa

El problema de la cinemática directa es determinar si existe desplazamiento, el paso  $\Delta x$  y las dimensiones del robot  $h$  y  $w$  cuando se aplican una amplitud  $A$  y una diferencia de fase  $\Delta\phi$  a los generadores sinusoidales. Se resuelve analizando en qué regiones del espacio de control se encuentra el punto de trabajo seleccionado. Y según su localización conoceremos si existen limitaciones por geometría o por el servo, si es un punto no válido, si la locomoción es estáticamente estable o no y cuál es el punto de trabajo en el espacio de formas, que determina las dimensiones del robot y el paso con el que se desplaza. Los pasos a seguir para la resolución de la cinemática directa los resumidos en la metodología propuesta.

#### 1.4.5.1. Principio de simetría del movimiento

El signo de la diferencia de fase  $\Delta\phi$  determina si la articulación  $i + 1$  se mueve adelantada o retrasada una cierta fase con respecto a la  $i$ . Esto hace que la onda se desplace hacia adelante o hacia atrás. Y por tanto, fija el sentido del movimiento del robot: adelante o atrás. Este signo sólo afecta al sentido del movimiento y no al resto de parámetros del robot. Fijado un valor para  $\Delta\phi$ , las dimensiones y el valor absoluto del paso serán los mismos para un robot que se mueve con  $\Delta\phi$  que para uno que lo hace con  $-\Delta\phi$ .

**Principio de simetría:** Dado un robot árido que se está desplazando en línea recta y que está controlado mediante una amplitud  $A$  y una diferencia de fase  $\Delta\phi$ , si se cambia el signo de  $\Delta\phi$  el

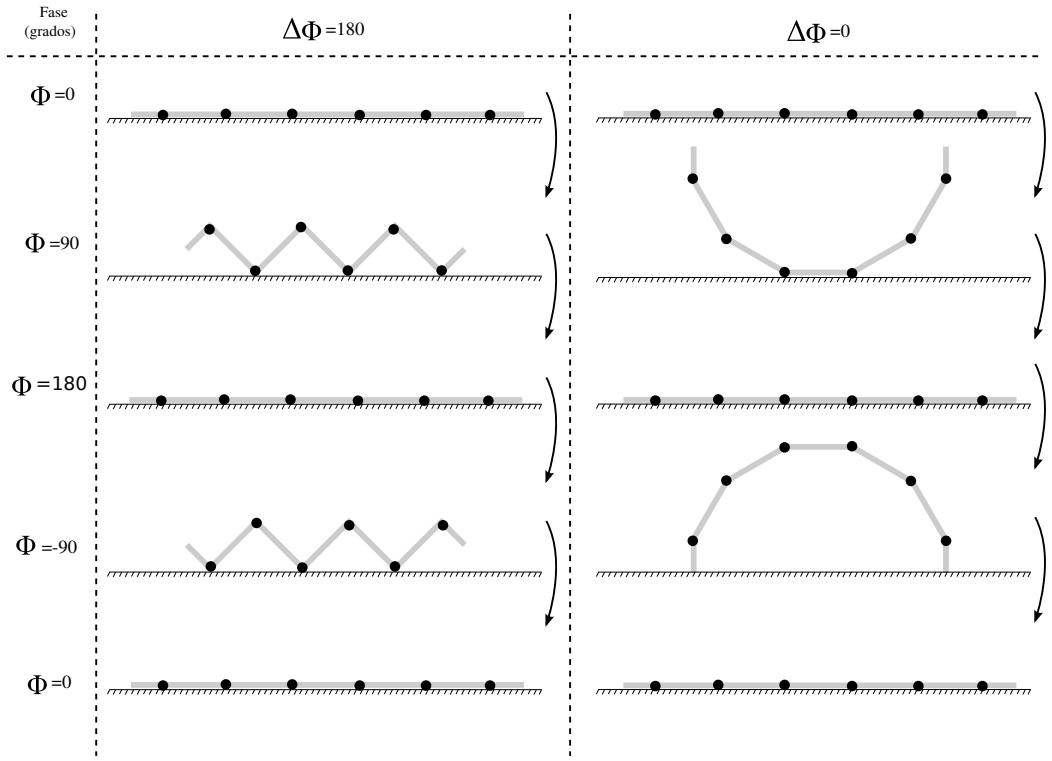


Figura 1.45: Evolución de la forma del robot cuando se controla con generadores en fase (derecha) y en oposición de fase (izquierda)

movimiento resultante será igual que el inicial pero en el sentido opuesto, con el mismo valor absoluto del paso y con las mismas dimensiones.

Por este principio de simetría, el estudio del movimiento sólo lo haremos para valores positivos de  $\Delta\phi$ , dibujándose el espacio de control para  $\Delta\phi \in [0, 180]$ .

#### 1.4.5.2. Movimientos en fase y oposición de fase

Cuando la diferencia de fase es de 180 grados, el movimiento de dos articulaciones consecutivas está en oposición de fase. En esta situación no hay propagación de ondas, sino que se alternan subidas y bajas de los picos y valles. Por tanto, no hay desplazamiento ni hacia adelante ni hacia atrás.

**Principio de oposición de fase:** Dado un robot ápodo al que se le aplica un valor de  $\Delta\phi$  de 180 grados, no se desplazará. Esto se cumple para cualquier valor de la amplitud de los generadores.

El caso opuesto es cuando todos los generadores están en fase y por tanto  $\Delta\phi = 0$ . En esta situación tampoco aparece una onda global que se propague por lo que no existe desplazamiento. La forma del

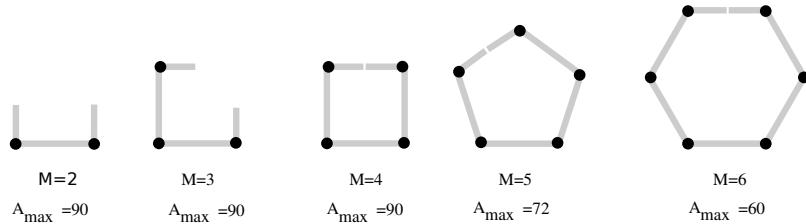


Figura 1.46: Forma de diferentes robots para la fase  $\phi = 90$  cuando el movimiento se realiza en fase ( $\Delta\phi = 0$ ) y la amplitud es máxima ( $A = A_{max}$ )

robot se describe mediante una onda circular discreta (apartado ??). Para que no exista colisión entre la cabeza y la cola del robot se tiene que verificar que la amplitud nunca supere el valor máximo dado por:

$$A_{max} = \begin{cases} 90 & M \leq 4 \\ \frac{360}{M} & M > 4 \end{cases}$$

En la figura 1.46 se muestra la forma de cinco robots de entre 2 y 6 módulos cuando se les aplica la amplitud máxima. Cuando la fase es de 90 grados y para  $M \geq 4$  adoptan forma de polígonos regulares: cuadrado, pentágono, hexágono...

**Principio de generadores en fase** Dado un robot ápodo en el que todos sus generadores sinusoidales están en fase ( $\Delta\phi = 0$ ), no se desplazará. Esto se cumple con independencia del valor de amplitud empleado.

En la figura 1.45 se muestran las formas que adopta un robot de 6 módulos al moverse con  $\Delta\phi = 0$  y  $\Delta\phi = 180$ . Cuando las articulaciones están en oposición de fase (izquierda) el robot realiza contracciones y expansiones. Cuando los generadores están en fase, el robot se pliega sobre si mismo y luego se abre. En el ejemplo mostrado comienza en posición recta apoyado sobre el suelo, luego pasa a forma de U, nuevamente a una recta, posición de U invertida y vuelta a empezar. El valor de la amplitud es el que determina la forma que tomará el robot. En ninguno de los dos casos hay locomoción.

#### 1.4.5.3. Número mínimo de módulos

**Principio del mínimo número de módulos** Para que un robot ápodo se mueva en línea recta con una locomoción estáticamente estable debe tener al menos un número mayor o igual a 5 módulos.

La región de locomoción, donde el movimiento es estáticamente estable está formada por los puntos cuya diferencia de fase está en el rango  $[\Delta\phi_s, 180]$ , donde  $\Delta\phi_s$  está dado por la ecuación 1.14. Para

valores  $M < 3$ ,  $\Delta\phi_s$  es mayor de 180 grados, quedando fuera del rango. Es decir, en estos casos no es posible que existan dos ondulaciones en el robot, por ser demasiado corto. Para  $M=4$ ,  $\Delta\phi_s = 180$  y la región de locomoción es una línea recta situada en  $\Delta\phi = 180$ . Ahora sí que hay dos ondulaciones sobre el robot, pero los generadores están en oposición de fase. Por el principio de la oposición de fase, en esta situación no hay locomoción. Por tanto,  $M$  tiene que ser mayor o igual a 5 módulos.

Esto no significa que los robots con  $M < 5$  no se puedan mover. Sí lo pueden hacer, sin embargo el movimiento no es uniforme y podrán existir transiciones bruscas entre fases. En estos caso hay que hacer un estudio específico para cada robot.

#### 1.4.5.4. Metodología de resolución de la cinemática directa

A continuación se presenta la metodología para abordar el problema de la cinemática directa. Dado un robot árido de  $M$  módulos y en el punto de trabajo  $P$  dado por el par  $(\Delta\phi, A)$  seguimos los siguientes pasos:

1. Comprobar si los valores de  $A$  y  $\Delta\phi$  están dentro de su rango de definición.  $A \in [0, 90]$  y  $|\Delta\phi| \in [0, 180]$ . Si no es así, se trata de un punto de trabajo no válido.
2. Comprobar la validez de  $p$  y la región de limitación en la que se encuentra:
  - a) Si  $\Delta\phi \geq \Delta\phi_L$ , donde  $\Delta\phi_L$  se calculó en la ec. 1.10 y tiene un valor aproximado de 43.9 grados, el punto  $p$  es **válido** y se encuentra en la región de limitación I.
  - b) Si  $\Delta\phi < \Delta\phi_L$ , entonces:
    - 1) Calcular  $A_{max}$  según la ecuación 1.11.
    - 2) Si  $A \leq A_{max}$  se trata de un **punto válido** situado en la región de limitación II
    - 3) Si  $A > A_{max}$  es un **punto no válido**. Provocará que el robot adopte una forma que colisiona consigo mismo. Hay una limitación en la geometría.
3. Comprobar si  $p$  pertenece a la región de locomoción:
  - a) Si  $\Delta\phi \leq \Delta\phi_s$ , donde  $\Delta\phi_s$  está dado por la ecuación 1.14,  $p$  no pertenece a la región de locomoción. Por tanto el **movimiento del robot no será estáticamente estable** y la ecuación del paso no se podrá aplicar.
  - b) Si  $\Delta\phi \geq \Delta\phi_s$ ,  $p$  pertenece a la región de locomoción. Por tanto el robot tendrá un movimiento estáticamente estable. El signo de  $\Delta\phi$  determinará el sentido del movimiento.
4. Obtener el punto equivalente  $P (M_u, \alpha)$  en el espacio de formas:
  - a) Obtener  $M_u$  mediante la ecuación 1.13
  - b) Obtener  $\alpha$  a partir de la ecuación 1.12

5. Obtener el número de ondulaciones  $k$  mediante la ecuación 1.4
  6. Calcular las dimensiones  $h$  y  $w$  usando las ecuaciones ?? y ?? respectivamente.
  7. Calcular el paso  $\Delta x$  con la ecuación 1.1.
- a) Si  $M_u < 3$  el paso teórico calculado no será válido. En estas circunstancias la forma del robot fuerza a que la distancia entre los puntos de apoyo varíe con la fase por lo que el paso dependerá del medio y será en general indeterminado.

### 1.4.6. Cinemática inversa

El problema de la cinemática inversa consiste en calcular los puntos de trabajo en el espacio de control para que el robot se mueva según las restricciones especificadas. Además de los parámetros de control, también se puede calcular el número de módulos  $M$  que debe tener el robot para cumplir esas restricciones, si es que no estuviese dado como un dato inicial.

Primero veremos los tipos de restricciones y la partición en subregiones que generan en el espacio de formas. Después analizaremos cómo calcular el número de módulos del robot, enunciaremos la metodología propuesta para la resolución de la cinemática inversa y por último mostraremos cómo se aplica esta metodología para resolver cuatro problemas de ejemplo.

#### 1.4.6.1. Restricciones

Las restricciones empleadas son de la forma  $F = c$ , donde  $F$  puede ser cualquiera de las funciones normalizadas de altura (ec. ??), anchura ( ??) o paso (1.1) y  $c$  es una constante real. En el espacio de formas se representan mediante curvas de nivel. Los puntos pertenecientes a ellas cumplen que  $F(M_u, A) = c$ . Cada curva partitiona el espacio  $h_1$  en dos regiones:  $F(M_u, A) < c$  y  $F(M_u, A) > c$  (Figura 1.47d). Hay que tener en cuenta que estas curvas especifican las restricciones para una única ondulación y usándose bloques con una distancia entre articulaciones igual a 1, por lo que antes de usarlas será necesario normalizar el valor de la constante.

En la figura 1.47 se muestran las curvas de las restricciones de altura, anchura y paso dentro del espacio de formas. Las representaciones en tres dimensiones de las funciones de altura, anchura y paso se presentaron en las figuras 1.28, 1.31 y 1.37 respectivamente.

#### 1.4.6.2. Número de módulos M

Las restricciones anteriores nos permiten definir las regiones de trabajo formadas por los puntos  $(M_u, \alpha)$ . En los problemas de la cinemática inversa puede ocurrir que bien  $M$  sea una constante

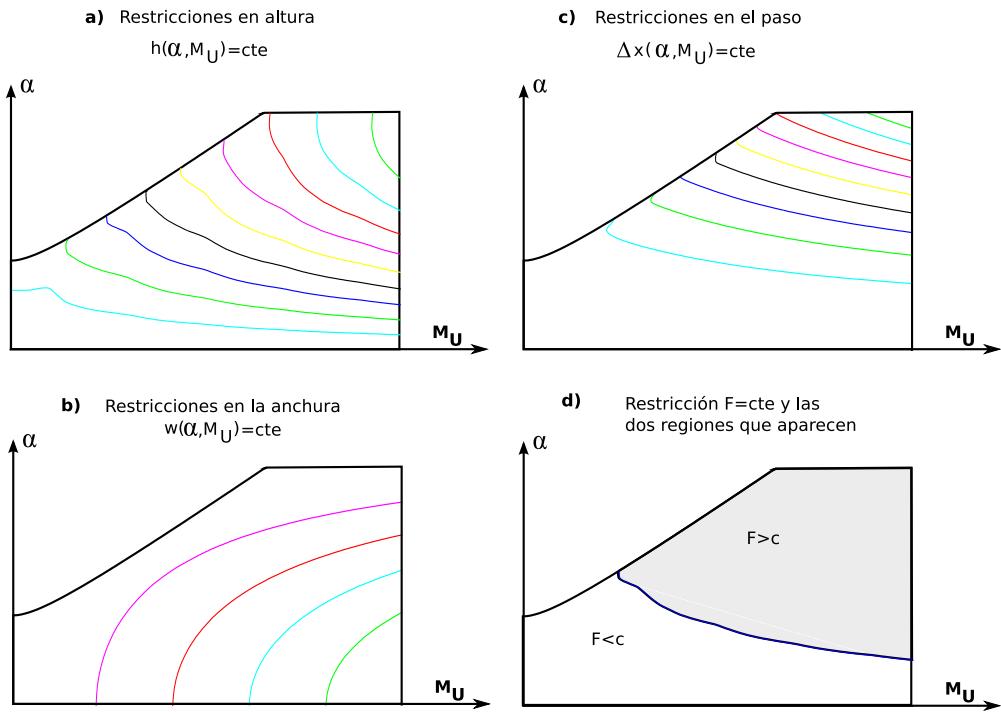


Figura 1.47: Curvas de restricciones en el espacio de formas. a) de altura. b) de anchura. c) del paso. d) Las dos regiones que aparecen al aplicar la restricción  $F = \text{cte}$

fijada o bien que haya que calcularla. En el primer caso se parte de un robot ápodo construido con  $M$  módulos y se quieren conocer los parámetros de control para que se mueva con las restricciones impuestas. En el segundo caso, se quiere determinar qué número de módulos  $M$  tiene que tener el robot para satisfacer esas restricciones.

En ambos casos utilizaremos siempre el criterio de estabilidad para obtener  $M$  a partir de  $M_u$ . Por ello, al menos deberán existir dos ondulaciones ( $k \geq 2$ ). Puesto que  $M$  es un número natural y  $M_u$  es real utilizaremos la siguiente expresión:

$$M = \text{Round}(2M_u) \quad (1.15)$$

donde  $\text{Round}()$  es la función de redondeo que devuelve el entero mayor o igual que el argumento pasado.

Cuando  $M$  no está especificado, en general tendremos que está comprendido entre un valor mínimo  $M_{min}$  y uno máximo  $M_{max}$ . Estos valores se obtendrán a partir de  $M_{u_{min}}$  y  $M_{u_{max}}$  respectivamente utilizando la ecuación 1.15.

El número de módulos por ondulación máxima y mínima serán las abscisas máximas y mínimas de

los puntos  $(M_u, \alpha)$  de la región de trabajo. El valor de  $M_{u\min}$  nunca podrá ser inferior a 2.5, por el principio del mínimo número de módulos (apartado 1.4.5.3).

#### 1.4.6.3. Metodología de resolución de la cinemática inversa

El proceso general de resolución de la cinemática inversa propuesto es:

1. Tomar la constante de la restricción de las dimensiones o el paso,  $c$  y normalizarla:  $c_n = c/L$ . Como estamos utilizando bloques de tipo módulo la distancia entre articulaciones es  $L$  (tabla ??). En el caso de que se esté especificando una anchura como restricción, esta constante se calculará como  $c_n = c/kL$  donde  $k \geq 2$  es el número de ondulaciones mínimo. Al menos tendrán que existir dos ondulaciones.
2. Obtener la curva de restricción dada por  $F = c_n$ , donde  $F$  es la función que da el paso, altura o anchura. El espacio de formas queda particionado en las dos regiones:  $F > c_n$  y  $F < c_n$ . Denominamos región de trabajo a la que cumple la restricción del problema a resolver.
3. Obtener el rango de valores de  $M$ . En general se cumplirá que  $M \in (M_{\min}, M_{\max})$ . Para su cálculo hay que obtener las abscisas máxima y mínima de la región de trabajo:  $M_{u\min}$  y  $M_{u\max}$  y aplicar la ecuación 1.15 para obtener  $M_{\min}$  y  $M_{\max}$  respectivamente.
4. Obtener la región de locomoción. El valor máximo de la abscisa que limita esta región,  $M_{us}$ , se calcula como:
  - a) Si  $M$  es un dato conocido: entonces  $M_{us} = M/2$
  - b) Si se quiere utilizar el mínimo número de módulos, entonces  $M_{us} = M_{\min}$
  - c) Si se quiere que el robot tenga el número máximo de módulos entonces  $M_{us} = M_{\max}$
5. Obtener la región solución como la intersección entre la región de trabajo y la región de locomoción. Será la zona de  $h_1$  en la que se verifican todas las restricciones impuestas. Esta región podrá ser: un punto, una recta o una superficie.
6. Realizar la transformación inversa de la región solución. Los puntos del espacio de control que pertenezca a la transformada de la región solución serán las soluciones  $(\Delta\phi, A)$  buscadas que cumplen todas las restricciones. La transformación inversa de un punto  $(M_u, \alpha)$  en otro  $(\Delta\phi, A)$  del espacio de control se realiza mediante las ecuaciones 1.13 y 1.12.

#### 1.4.6.4. Problema de ejemplo 1

**Enunciado:** Determinar el número mínimo de módulos de un robot ápodo para que se desplace con una altura mayor o igual a  $H$ .

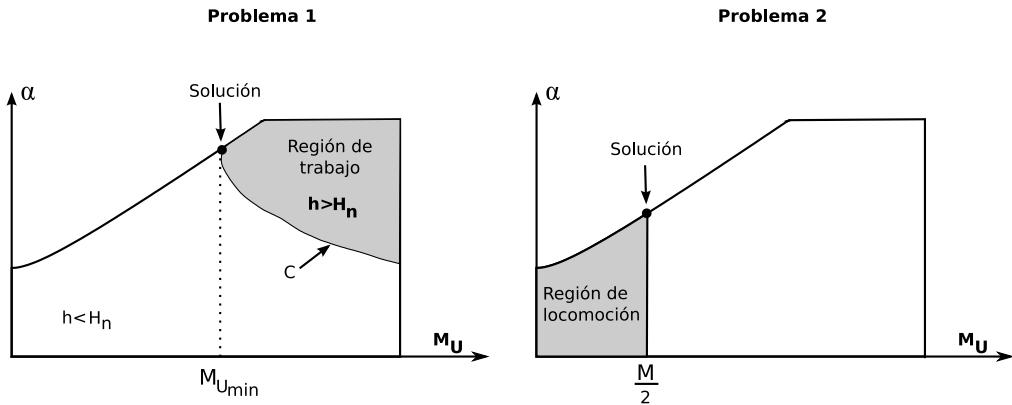


Figura 1.48: Espacios de formas con las soluciones de los problemas 1 y 2

**Solución:** Se está imponiendo una restricción en la altura ( $h \geq H$ ) y el valor de  $M$  no está dado, sino que tiene que ser el mínimo. Aplicando el procedimiento de resolución:

1. Calcular la altura normalizada:  $H_n = H/L$ .
2. Obtener la región de trabajo determinada por la restricción  $h \geq H_n$ . Se muestra en la parte izquierda de la figura 1.48. Todos los puntos de esa región hacen que el robot se mueva con una altura mayor o igual a la especificada.
3. No existe un valor máximo para el número de módulos, pero sí uno inferior por lo que  $M \geq M_{min}$ . La menor abscisa de los puntos de la región de trabajo es  $M_{u_{min}}$  (figura 1.48). A partir de ella se obtiene  $M_{min}$ .
4. La región de locomoción está dada por  $M_{us} = M_{u_{min}}$ .
5. La intersección entre la región de locomoción y la región de trabajo es el punto solución  $(M_{u_{min}}, \alpha)$ .
6. Aplicando la transformación inversa se obtiene el punto solución  $(\Delta\phi, A)$  en el espacio de control.

#### 1.4.6.5. Problema de ejemplo 2

**Enunciado:** *Dado un robot de  $M$  módulos, encontrar los valores de  $A$  y  $\Delta\phi$  para que se desplace con el máximo paso.*

**Solución:** Se impone una restricción en el paso (que sea máximo) y el número de módulos  $M$  es conocido.

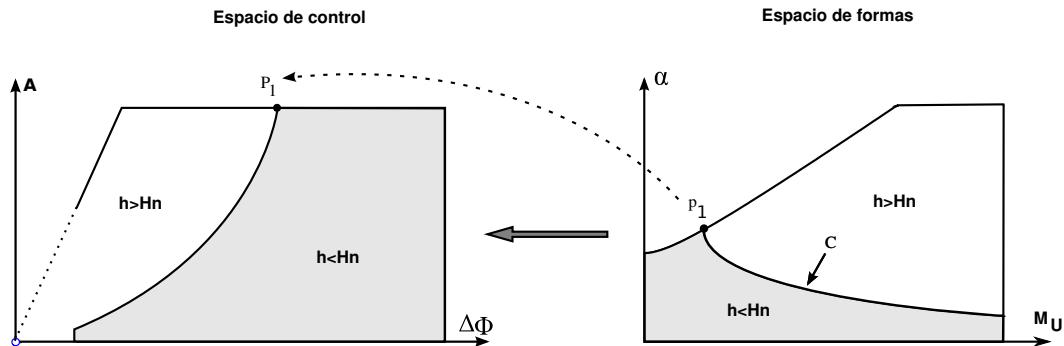


Figura 1.49: Espacio de formas y control con la solución al problema 3

1. No hay ninguna constante especificada por lo que no se hace nada en este paso.
2. Sabemos que el paso es máximo para los valores máximos de  $\alpha$  (ver figura 1.37) por tanto la región de trabajo es la curva  $\alpha = \alpha_{max}$  (ec. 1.6).
3.  $M$  es un dato, no hay que hacer nada en este paso.
4. La región de locomoción está dada por  $M_{us} = M/2$ .
5. La intersección con la región de locomoción y la región de trabajo es el punto solución ( $M/2, \alpha$ ). El valor de  $\alpha$  se puede obtener como:  $\alpha = \alpha_{max}(M/2)$
6. Aplicando la transformación inversa se obtiene el punto solución  $(\Delta\phi, A)$  en el espacio de control.

#### 1.4.6.6. Problema de ejemplo 3

**Enunciado:** Encontrar los valores  $A, \Delta\phi$  y  $M$  para que el robot pueda moverse por el interior de un tubo de diámetro  $D$ .

**Solución:** En este caso la restricción viene dada por la condición de que la altura del robot debe ser menor que el diámetro del robot:  $h \leq D$ . No hay restricciones en cuanto al número de módulos. Los pasos para su resolución son los siguientes:

1. Calcular la altura normalizada:  $H_n = D/L$ .
2. Obtener la región del espacio de formas donde se cumple que  $h \leq D$  (Figura 1.49).
3. No existe un valor máximo para el número de módulos, pero sí uno inferior por lo que  $M \geq M_{min}$ . La abscisa mínima de la región de trabajo está en  $M_u = 2$ , pero por el principio del mínimo número de módulos tenemos que  $M_{u_{min}} = 2,5$  y por tanto  $M \geq 5$ .

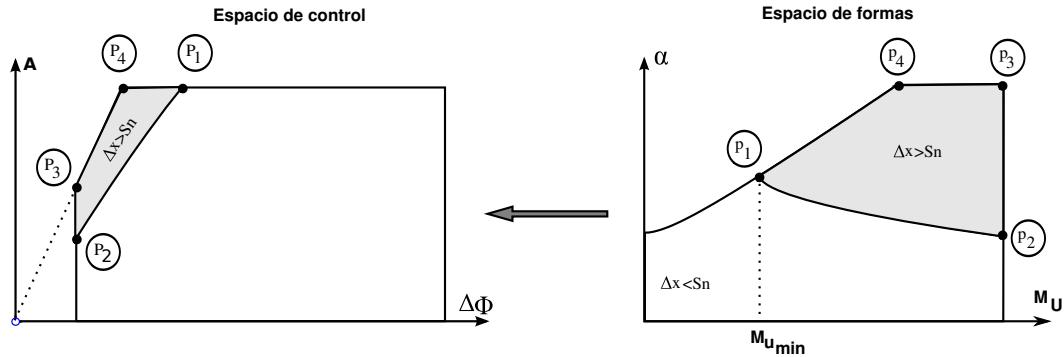


Figura 1.50: Espacio de formas y control con la solución al problema 4

4. Como no está fijada ninguna restricción para  $M$ , cualquier valor superior o igual a 5 será válido. En ese caso tomaremos una región de locomoción genérica dada por  $M_{us} = M/2$ . Si se quiere calcular el robot con el menor número de módulos se tomaría  $M_{us} = 2,5$ .
5. La intersección entre la región de locomoción y la región de trabajo es la propia región de trabajo. Si en el paso 4 se ha escogido usar el mínimo número de módulos entonces la solución es el punto  $(M_{u_{min}}, \alpha)$ . (Punto  $p_1$ )
6. Realizar la transformada inversa de la región de trabajo. Obtenemos la región de control con los punto  $(\Delta\phi, A)$  que cumplen la condición inicial establecida (Figura 1.49).

#### 1.4.6.7. Problema de ejemplo 4

**Enunciado:** Calcular los parámetros  $A, \Delta\phi$  y  $M$  para que el paso del robot sea mayor o igual a  $S$ .

**Solución:** Se tienen una restricción en el paso:  $\Delta x \geq S$ . Los pasos son:

1. Obtener el paso normalizado:  $S_n = S/L$
2. Obtener la región del espacio de formas donde se cumple que  $\Delta x \leq S_n$  (Figura 1.50).
3. El número de módulos mínimo está dado por el punto de la región de trabajo con la menor abscisa. Esto nos permite calcular  $M_{u_{min}}$  y  $M_{min}$ . Por tanto el número de módulos deberá cumplir que  $M \geq M_{min}$ .
4. Igual que en el problema 4, podemos calcular la región de locomoción para el caso genérico, haciendo  $M_{us} = M/2$  o bien calcularla para el número mínimo de módulos, tomando  $M_{us} = M_{u_{min}}$ .

| Parámetro      | Descripción                                  | Rango                                      |
|----------------|--|--|
| $M$            | Número de módulos                            | $M = 8$                                    |
| $ \Delta\phi $ | Variación de fase                            | $ \Delta\phi  \in [45, 180]$               |
| $M_u$          | Número de módulos por ondulación             | $M_u \in [2, 8]$                           |
| $k$            | Número de ondulaciones                       | $k \in [1, 4]$                             |
| $A_{max}$      | Amplitud máxima de los generadores           | 90   |
| $A$            | Amplitud de los generadores                  | $A \in [0, 90]$                            |
| $\alpha_{max}$ | Máximo ángulo de serpenteo                   | $\frac{45}{\sin(\frac{\pi}{M_u})} < 117,6$ |
| $\alpha$       | Ángulo de serpenteo                          | $\alpha \in [0, \alpha_{max}]$             |
| $M_{us}$       | Frontera de la región de locomoción en $h_1$ | 4  |
| $\Delta\phi_s$ | Límite Región de locomoción en $H_1$         | $\Delta\phi_s = 90.$                       |
| $L$            | Longitud de un módulo                        | 7,2cm                                      |
| $d$            | Longitud del bloque                          | $d = L$                                    |
| $d_0$          | Longitud del brazo izquierdo del bloque      | $d_0 = L/2$                                |

Cuadro 1.2: Parámetros y sus rangos de valores para el modelo alámbrico de un robot ápodo discreto de 8 módulos.

5. La intersección con la región de locomoción y la región de trabajo será o bien el punto es el punto solución  $(M_{u_{min}}, \alpha)$  o la propia región de trabajo, según el valor de  $M_{us}$  escogido en el paso 4.
6. Realizar la transformada inversa de la región de trabajo. Obtenemos la región de control con los punto  $(\Delta\phi, A)$  que cumplen la condición inicial establecida (Figura 1.50). Bien será el punto solución  $P_1$  o bien la transformada de la región de trabajo completa.

## 1.5. Caso de estudio

En este apartado vamos a aplicar todas las ideas desarrolladas en el capítulo para estudiar el modelo alámbrico de un robot de 8 módulos. Se calculan las constantes y los rangos de valores de los parámetros cuando  $M = 8$ , se obtienen los espacios de formas y de control así como la región de locomoción. Como ejemplo se calculan tres puntos de trabajo diferentes y se muestra la forma y propiedades del robot en cada uno de ellos.

### 1.5.1. Rangos de valores de los parámetros y constantes

En la tabla 1.2 se muestran los valores de los parámetros y constantes calculados para este caso de estudio. Los valores de  $M_u$  y  $k$  se obtienen de la tabla 1.1 particularizando para  $M = 8$ .

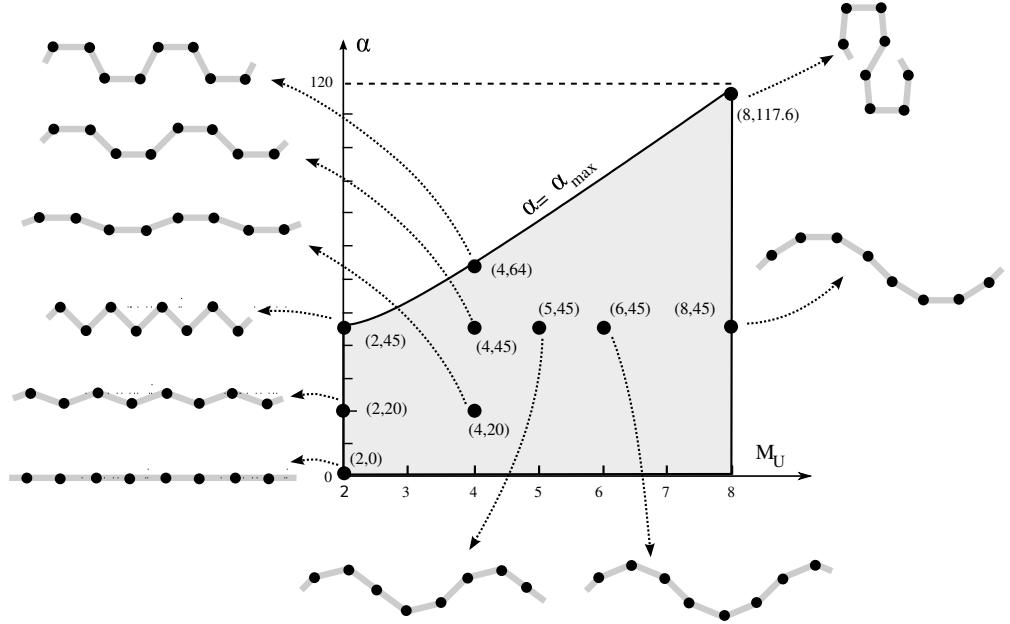


Figura 1.51: Espacio de formas de un robot ápodo discreto de 8 módulos

### 1.5.2. Espacio de formas

El espacio de formas se muestra en la figura 1.51. Además se ha dibujado el aspecto de los robots para algunos puntos de trabajo seleccionados y para una fase  $\phi = 0$ .

Dado que  $M_u$  está entre comprendido entre 2 y 8, se verifica siempre que  $M_u \leq M_{uL}$  por lo que en el espacio de formas sólo existe la región de limitación I. No hay limitaciones por geometría. A partir de las ecuaciones 1.6 y 1.7 se tiene que el valor máximo para la amplitud es 90 y para el ángulo de serpenteo:

$$\alpha_{max} = \frac{45}{\sin\left(\frac{\pi}{M_u}\right)}$$

que será siempre estrictamente menor que 120 grados. El máximo valor de este ángulo de serpenteo se tiene para  $M_u = 8$  y es de 117 grados.

### 1.5.3. Espacio de control

El espacio de control se muestra en la figura 1.52. Es un rectángulo con la base situada entre  $\Delta\phi = 45$  y 180 grados y el parámetro  $A$  entre 0 y 90.

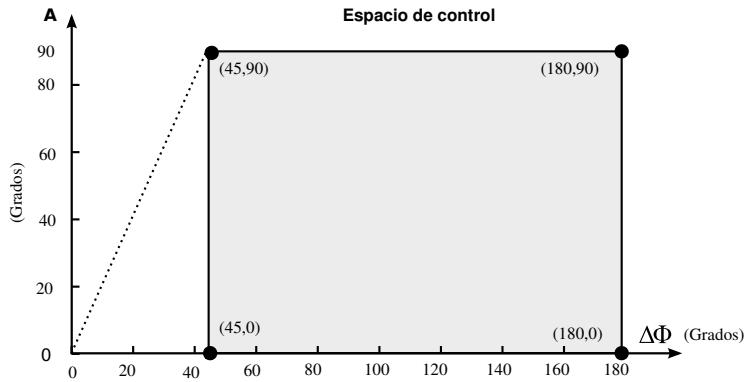


Figura 1.52: Espacio de control de un robot ápodo discreto de 8 módulos

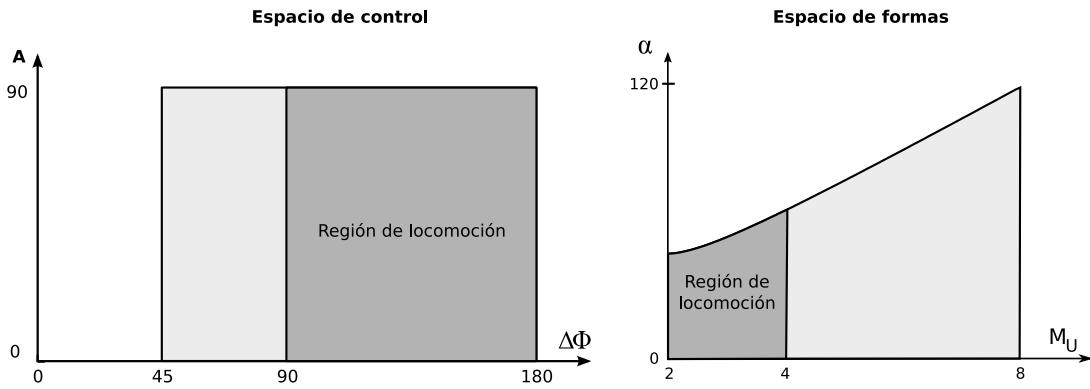


Figura 1.53: Región de locomoción en los espacios de control y de formas para un robot ápodo discreto de 8 módulos

El valor mínimo para  $|\Delta\phi|$  es de 45 grados. Se calcula a partir de la ecuación ?? particularizándola para  $k = 1$  y  $M = 8$ . Si se utiliza un valor menor, el robot no tendrá una ondulación completa ( $k < 1$ ) y las ecuaciones introducidas en este capítulo no serán válidas.

#### 1.5.4. Región de locomoción

La región de locomoción para el espacio de formas está determinada por  $M_{us} = M/2 = 8/2 = 4$ . Para el espacio de control, aplicando la ecuación 1.14 se tiene que  $\Delta\phi_s = 90$ . Las regiones de locomoción de los espacios  $h_1$  y  $H_1$  se han dibujado en la figura 1.53.

#### 1.5.5. Puntos de trabajo

Se han seleccionado tres puntos de trabajo diferentes que se muestran en la figura 1.54 y se resumen en la tabla 1.3. En el punto 1 el robot tiene la altura máxima. Este punto se encuentra fuera de la

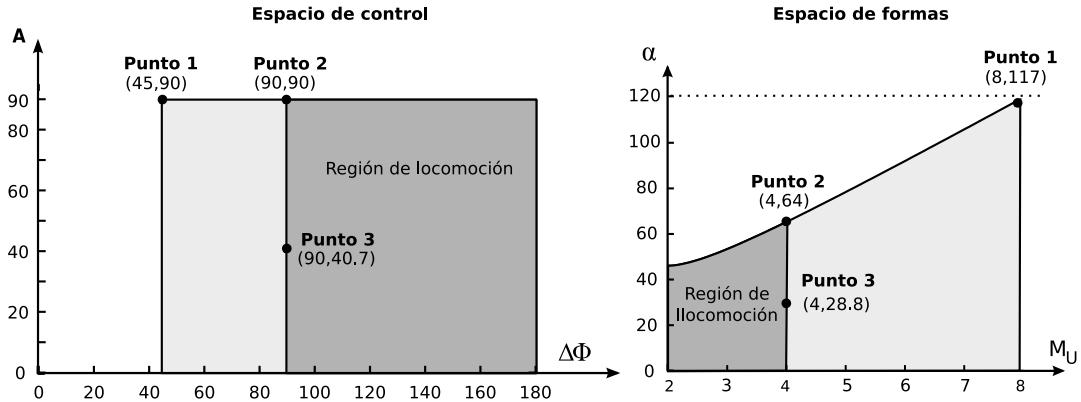


Figura 1.54: Situación de los puntos de trabajo seleccionados en los espacios de control y de formas

| Punto trabajo  | $(M_u, \alpha)$ | $(\Delta\Phi, A)$ | Altura (cm)  | Anchura (cm) | Paso (cm) | Descripción         |
|----------------|-----------------|-------------------|--------------|--------------|-----------|---------------------|
| <b>Punto 1</b> | (8, 117)        | (45, 90)          | [20,7, 23,8] | 11,2         | Inestable | Máxima altura       |
| <b>Punto 2</b> | (4, 64)         | (90, 90)          | [6,5, 11,2]  | [20,4, 20,8] | 8,4       | Paso máximo         |
| <b>Punto 3</b> | (4, 28, 8)      | (90, 40, 7)       | [3,5, 5]     | 27           | 1,8       | $h \leq 5\text{cm}$ |

Cuadro 1.3: Resumen de los puntos de trabajo seleccionados para un robot ápodo discreto de 8 módulos

región de locomoción por lo que es una configuración inestable no válida para el movimiento. El punto 2 es en el que el robot se mueve con el paso máximo y de forma estable. Por último, el punto 3 se calcula aplicando la cinemática inversa para que se pueda desplazar por el interior de un tubo de 5cm de diámetro y con el máximo paso.

#### 1.5.5.1. Punto 1: Altura máxima

La forma y dimensiones del robot en el punto de trabajo 1 se muestran en la figura 1.55, para las fases  $\phi$  de  $-90$  y  $-110$  grados. La altura es máxima en la fase  $-110$  grados. Por tratarse de un robot discreto, la altura varía con la fase. La máxima variación es de 3,1cm, que representa un 13 % respecto a la altura máxima. La anchura no varía y tiene un valor de 11,2cm para todas las fases.

Se observa que para la fase  $-90$  grados el robot es estable. La proyección del centro de masas cae dentro del segmento de apoyo y por tanto el robot no vuelca. Sin embargo, en la fase de  $-110$  grados no es estable y volcaría. En este punto no se está cumpliendo el criterio de estabilidad.

#### 1.5.5.2. Punto 2: Paso máximo

El punto de trabajo 2 se ha calculado de manera que el paso del robot sea máximo. La forma y dimensiones se muestran en la figura 1.56. La altura máxima se alcanza para una fase de  $-135$  grados

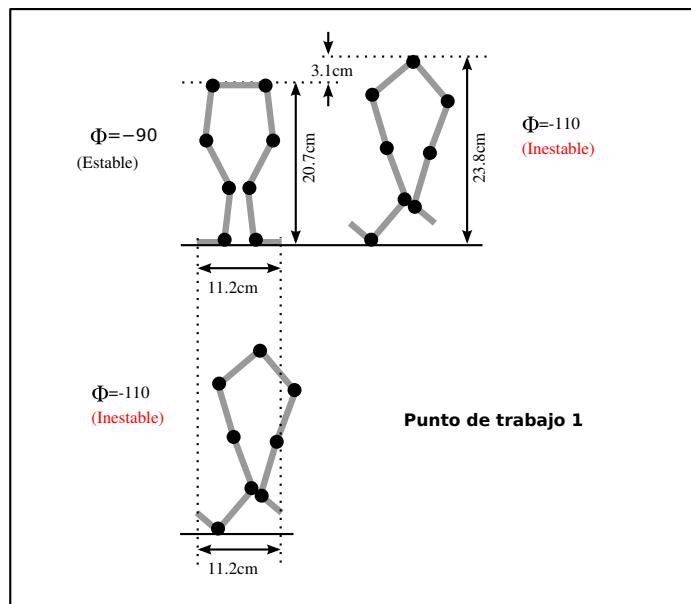


Figura 1.55: Dimensiones de un robot ápodo discreto de 8 módulos cuando se establece el punto de trabajo 1

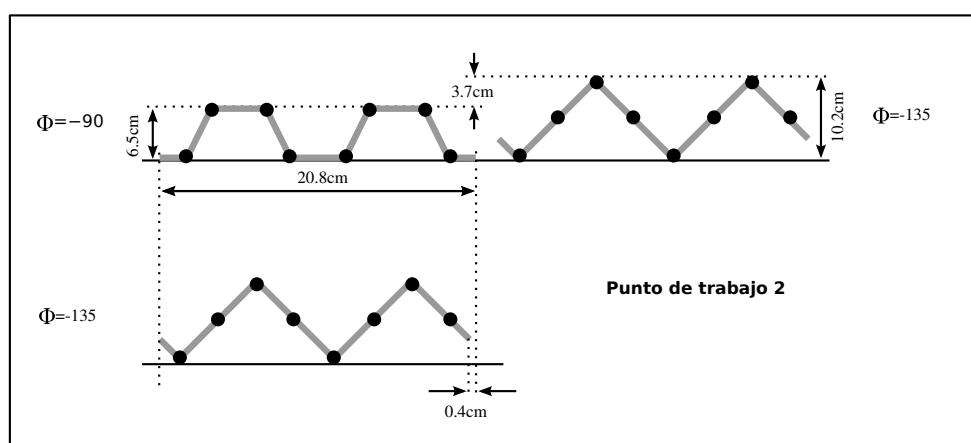


Figura 1.56: Dimensiones de un robot ápodo discreto de 8 módulos cuando se establece el punto de trabajo 2

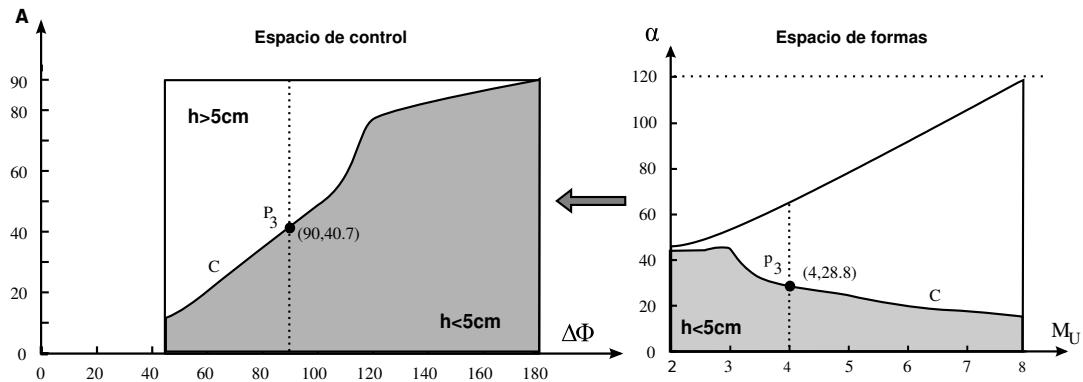


Figura 1.57: Aplicación de la cinemática inversa para la obtención del punto de trabajo 3 en el que un robot ápodo discreto de 8 módulos pueda desplazarse por el interior de un tubo de 5cm de diámetro

y la mínima en  $-90$ . La diferencia es de 3,7cm lo que representa un 36 % con respecto a la altura máxima. La anchura apenas varía 0,4cm (un 2 % respecto a la anchura máxima).

El movimiento del robot es estáticamente estable ya que en todo momento al menos existen dos puntos de apoyo.

#### 1.5.5.3. Punto 3: Movimiento por el interior de un tubo

El punto 3 es el que permite que el robot se pueda desplazar por el interior de un tubo de diámetro  $D = 5cm$  y que además el paso sera máximo. Lo calcularemos aplicando la metodología propuesta en el apartado 1.4.6.3:

1. Calcular la altura normalizada:  $H_n = D/L = 5/7,2 = 0,69 \approx 0,7$
2. La región que satisface la restricción  $h < H_n$  se muestra en la figura 1.57. La curva C es la que delimita la región de trabajo.
3.  $M=8$  es un dato dado.
4. La región de locomoción es en la que  $M_{us} = M/2 = 8/2 = 4$ .
5. La intersección entre la región de trabajo y la de locomoción es una línea vertical con abscisa  $M_u = 4$ . Todos los puntos de esa recta son soluciones del problema. Como queremos aquella solución en la que además el paso sea máximo y el paso para un  $M_u$  fijo aumenta con  $\alpha$ , la solución se encuentra en la intersección entre la región de locomoción y la curva C. Será el punto  $(M_u, \alpha(M_u)) = (4, 28,8)$ .
6. Realizando la transformación inversa de este punto obtenemos la solución:  $P_3 = (90, 40,7)$ .

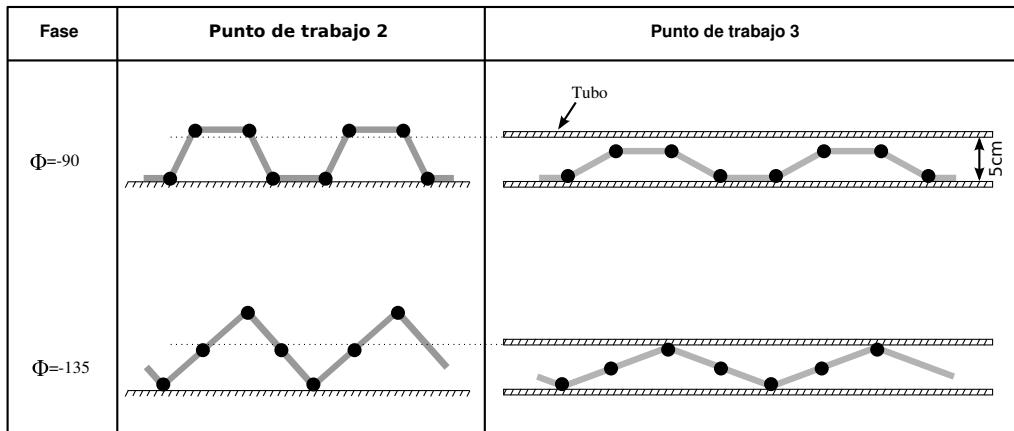


Figura 1.58: Comparación entre los puntos de trabajo 2 y 3

En la figura 1.58 se comparan los puntos 2 y 3. La forma es la misma, ya que  $Mu$  es igual en ambos puntos. La diferencia se debe a que en el punto 3 el ángulo de serpenteo es menor por lo que la altura es menor y la anchura mayor. Se puede observar cómo en el caso peor,  $\phi = -135$ , la altura máxima del robot cumple la restricción de ser menor o igual 5.

El paso en el punto 2 es de 8,4cm y en el punto 3 de 1,8cm.

### 1.5.6. Locomoción

La locomoción de un robot ápodo discreto de 8 módulos se muestra detalladamente en la figura 1.59 para un ciclo. Se han representado 15 fases diferentes. Se pueden apreciar las diferentes formas de las ondulaciones y cómo para todas ellas existen siempre dos puntos de apoyo que hacen que la locomoción sea estáticamente estable. También se puede apreciar que la altura del robot varía mientras que su anchura permanece prácticamente constante. Al final del ciclo el robot ha avanzado una distancia igual a 8.4cm que representa un 40 % de su anchura en ese punto de trabajo.

## 1.6. Principios de locomoción

La locomoción de los robots ápodos discretos cuando se utilizan generadores sinusoidales la resumimos en los siguientes 11 principios fundamentales:

1. **Principio de los generadores sinusoidales.** Un robot ápodo de  $M$  módulos con conexión del tipo cabeceo-cabeceo en el que se hacen oscilar periódicamente cada una de las articulaciones usando generadores sinusoidales con una amplitud  $A$  y una diferencia de fase  $\Delta\phi$ , es capaz de desplazarse en linea recta.

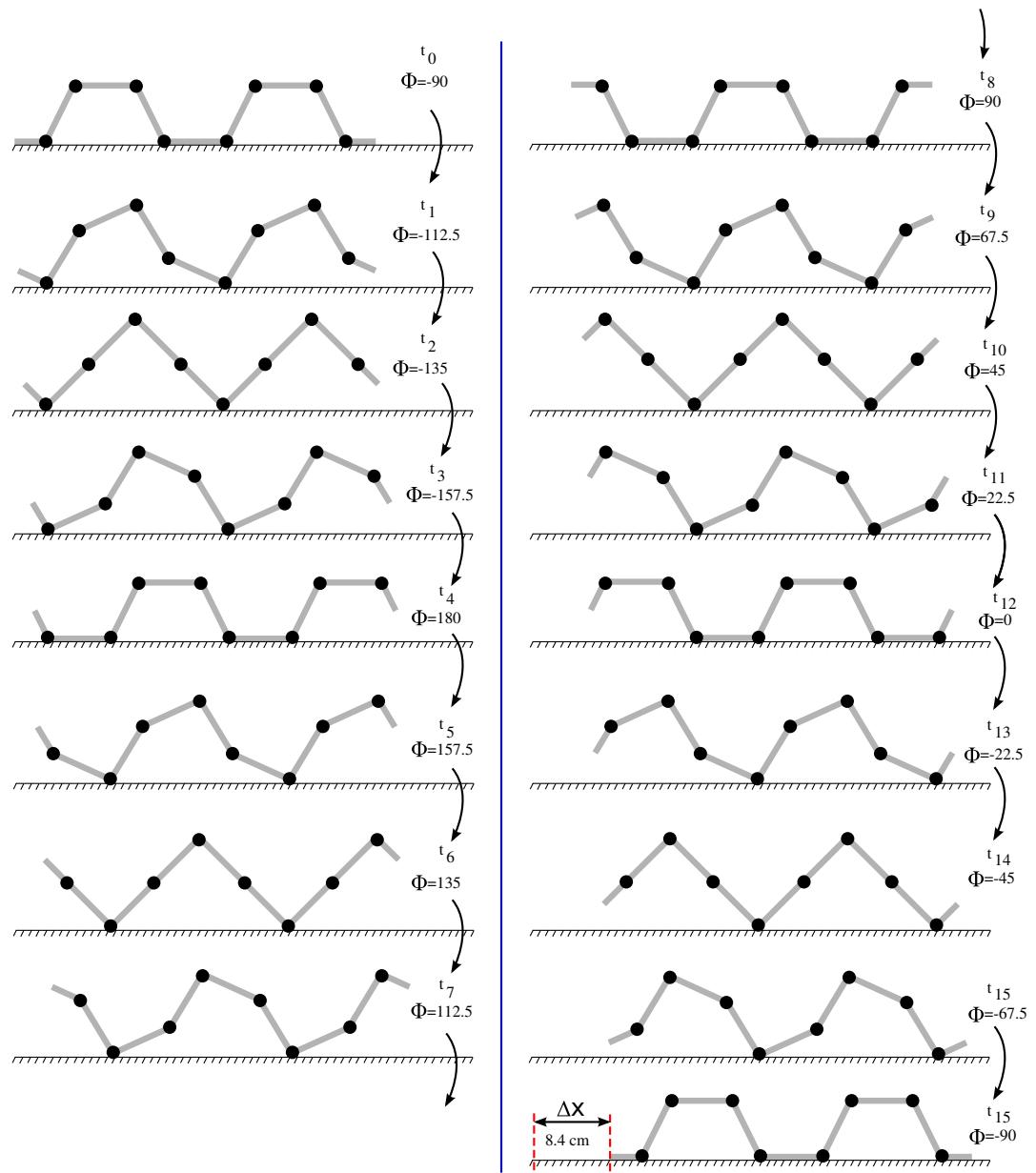


Figura 1.59: Locomoción de un robot ápodo discreto de 8 módulos cuando se utiliza el punto de trabajo 2.

2. **Principio de la onda corporal.** El mecanismo de locomoción de un robot ápodo controlado con generadores sinusoidales es debido a la aparición de las ondas corporales que se propagan por el robot.
3. **Principio del sentido del movimiento.** El sentido de desplazamiento del robot será igual al de la onda corporal. Si ésta se propaga desde la cola hasta la cabeza, el robot avanzará.
4. **Principio de caracterización de la forma.** La onda corporal que aparece durante la locomoción es del tipo serpantinoide y queda caracterizada por los parámetros ángulo de serpenteo  $\alpha$  y número de ondulaciones  $k$ .
5. **Principio de estabilidad.** La locomoción del robot es estáticamente estable si y sólo si existen al menos dos ondulaciones que recorren el robot y por tanto  $k \geq 2$ .
6. **Principio del paso.** La distancia recorrida por el robot durante un ciclo, denominada paso, es directamente proporcional a la diferencia entre la longitud de una ondulación y la longitud de onda.
7. **Principio de control de la amplitud.** La altura y el paso del robot dependen directamente de la amplitud  $A$  de los generadores. Cuanto mayor sea esta amplitud, mayores serán la altura y el paso.
8. **Principio de control de la diferencia de fase.** La forma de una ondulación y el número de ellas dependen del parámetro  $\Delta\phi$  de los generadores.
9. **Principio de simetría.** El signo de la diferencia de fase  $\Delta\phi$  determina el sentido de desplazamiento del robot. Dos movimientos con el mismo valor absoluto  $|\Delta\phi|$  pero de diferente signo serán exactamente iguales, pero realizados en sentidos opuestos.
10. **Principio de generadores en fase y oposición de fase.** Si todos los generadores están en fase o bien en oposición de fase, no existirá propagación de ondas y por tanto no habrá locomoción del robot.
11. **Principio del mínimo número de módulos.** El mínimo número de módulos para que un robot ápodo se pueda desplazar de manera estáticamente estable es de cinco.

## 1.7. Conclusiones

En este capítulo se ha estudiado a fondo el problema de la **locomoción en una dimensión** de los robots ápodos del **grupo cabeceo-cabeceo**.

El modelo continuo se ha empleado para entender la locomoción de estos robots, independientemente del número de módulos. Así, **sólo mediante los parámetros  $\alpha$  y  $k$  quedan especificadas las formas que adoptan los robots al desplazarse y sus propiedades de locomoción**. Se ha enunciado

la condición que debe cumplirse para que el movimiento sea estáticamente estable y se ha propuesto una ecuación para el cálculo del paso. Con ello se han establecido las relaciones necesarias entre el modelo cinemático y el matemático.

A partir de los conceptos del modelo continuo se ha analizado el modelo discreto. Se han identificado los parámetros nuevos que aparecen, sus rangos de valores y las limitaciones. **Se propone utilizar la idea del espacio de formas para representar los puntos de trabajo del robot**, a partir del número de módulos por ondulación  $M_u$  y  $\alpha$ . Para cada uno de estos puntos el robot tendrá una altura, anchura y un paso.

Además, proponemos **estudiar la cinemática** de estos robots **mediante transformaciones entre los espacios de control y de formas**. Con este método no sólo se obtiene una representación muy compacta sino que se simplifican los problemas. Las restricciones en el paso o las dimensiones se expresan mediante regiones en el espacio de formas.

**Se han propuesto las metodologías para la resolución de la cinemática directa e inversa** mediante unos sencillos pasos. Se han presentado ejemplos de cómo se aplican estas metodologías para resolver problemas como el de la **maximización del paso** del robot o el cálculo de sus parámetros de control para que se **pueda desplazar por el interior de un tubo**.

El estudio de la locomoción se ha hecho de manera genérica para toda la familia de robots de tipo cabeceo-cabeceo de  $M$  módulos. Como ejemplo de aplicación, se ha presentado un **caso de estudio** de un **robot de 8 módulos** y se han obtenido unos resultados numéricos que son contrastados en el capítulo de experimento con las mediciones realizadas en las simulaciones y el robot real.

El modelo de locomoción de robots ápodos propuesto nos permite entender la locomoción, parametrizarla y realizar cálculos a priori para predecir cómo se moverá el robot al aplicar unos valores a los generadores sinusoidales o bien determinar los valores de los parámetros de control para satisfacer las restricciones impuestas por el entorno. Lo que se ha conseguido es **explicar la locomoción relacionando el desplazamiento del robot con los parámetros de los generadores**.

Finalmente, **todas las ideas se han resumido en 11 principios fundamentales** (apartado 1.6) que permiten comprender la locomoción de los robots ápodos controlados mediante generadores sinusoidales.

# **Bibliografía**