

# Capítulo 1

## Modelos

”La ciencia se construye a partir de aproximaciones que gradualmente se acercan a la verdad”

– *Isaac Asimov*

### 1.1. Introducción

En este capítulo presentamos los modelos empleados para el estudio de los robots ápodos modulares. En la primera parte introducimos los modelos para los módulos, los tipos de conexionado, los grupos de robots y sus parámetros. En la segunda describimos los tres modelos fundamentales: modelo de control, cinemático y matemático. Finalmente, en las conclusiones, estableceremos las relaciones entre todos estos modelos y cómo plantearemos la solución al problema de la coordinación.

### 1.2. Modelos de módulos

Para el estudio de la locomoción de los robots modulares utilizaremos tres modelos: **alámbrico**, **hexaédrico** y **real**. El primero es el más importante y es con el que desarrollaremos el modelo matemático. El hexaédrico lo utilizaremos en las simulaciones y el último para la construcción de robots reales con los que experimentar.

#### 1.2.1. Modelo alámbrico

En este modelo el módulo está constituido por dos segmentos iguales unidos mediante una articulación. Los segmentos los denominaremos izquierdo y derecho.

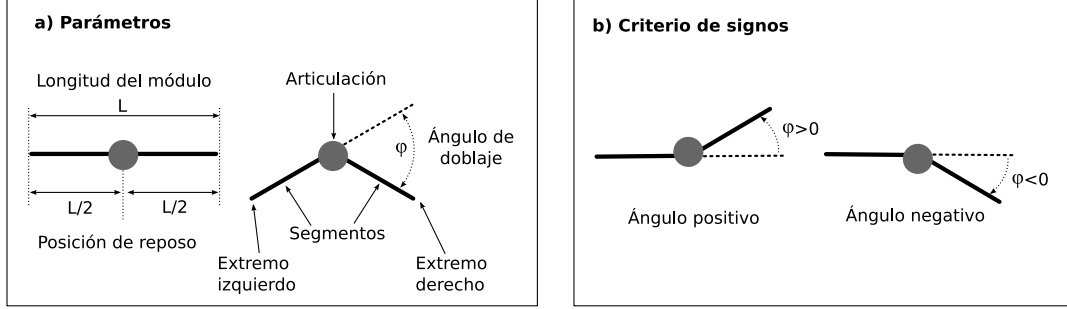


Figura 1.1: Modelo alámbrico del módulo. a) Parámetros: longitud del módulo y ángulo de doblaje. b) Criterios de signos para el ángulo de doblaje

#### 1.2.1.1. Parámetros

Los parámetros del módulo  $i$  son (figura 1.1):

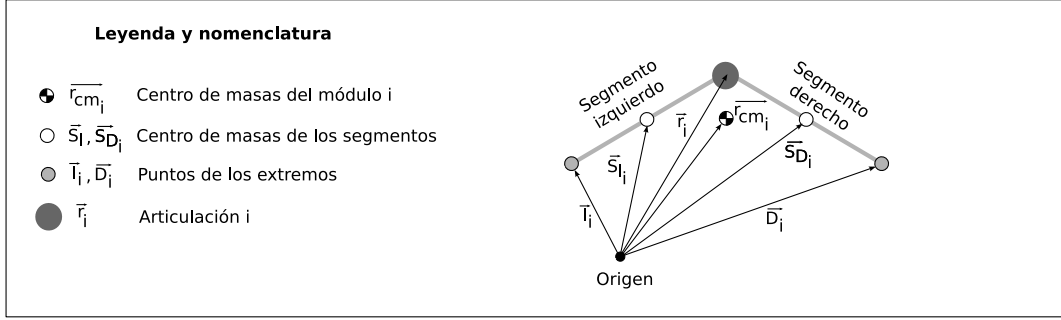
- **Ángulo de doblaje ( $\phi_i$ ):** Es el ángulo que forman los dos segmentos. Está determinado por la articulación. Su valor lo restringiremos al intervalo  $[-90, 90]$ , que es el típico de los servos comerciales. El rango total de giro es de 180 grados.
- **Longitud del módulo ( $L$ ):** Longitud total del módulo cuando está en la posición de reposo. En este estado el ángulo de doblaje es de cero grados. Puesto que los segmentos son iguales, cada uno de ellos tendrá una longitud  $L/2$ .
- **Masa ( $m$ ).** Supondremos que la masa está repartida uniformemente entre los dos segmentos (y la articulación no tiene masa). Cada segmento tendrá una masa de  $m/2$ .
- **Vector de posición ( $\vec{r}_i$ ):** Posición de la articulación  $i$
- **Vectores de posición de los extremos:**  $\vec{T}_i, \vec{D}_i$ .

#### 1.2.1.2. Centro de masas

Denotaremos por  $\vec{r}_{cm_i}$  al vector de posición del centro de masas del módulo  $i$ . Se puede expresar en función de los vectores de posición de la articulación  $\vec{r}_i$ , el extremo izquierdo  $\vec{T}_i$  y el derecho  $\vec{D}_i$  como se indica en la ecuación 1.1.

$$\vec{r}_{cm_i} = \frac{1}{4} (\vec{T}_i + 2\vec{r}_i + \vec{D}_i) \quad (1.1)$$

Se deduce calculando los centros de masas de los segmentos izquierdo y derecho. A partir de ellos, y asumiendo que los segmentos son iguales, la expresión del centro de masas se obtiene mediante la

Figura 1.2: Vectores de posición y centro de masas del módulo  $i$ 

ecuación 1.2. Los vectores de posición de los centros de masas de los segmentos se pueden poner en función de los vectores de posición de la articulación y los extremos, como se indica en la ecuación 1.3. Sustituyen esas expresiones en 1.2 se llega a 1.1. En la figura 1.2 se muestra el módulo  $i$  con los diferentes centros de masas y vectores de posición.

$$\vec{r}_{cm_i} = \frac{1}{m_i} \left( \frac{m_i}{2} \vec{S}_{l_i} + \frac{m_i}{2} \vec{S}_{d_i} \right) = \frac{\vec{S}_{l_i} + \vec{S}_{d_i}}{2} \quad (1.2)$$

$$\vec{S}_{l_i} = \frac{\vec{T}_i + \vec{r}_i}{2}, \vec{S}_{d_i} = \frac{\vec{r}_i + \vec{D}_i}{2} \quad (1.3)$$

### 1.2.2. Modelo hexaédrico

En el modelo hexaédrico cada módulo se representa mediante dos hexaedros unidos por un eje (paralelo al eje  $y$ ). Cada hexaedro rota con respecto al otro alrededor de este eje común (figura 1.3). El ángulo de doblaje  $\varphi_i$  es el que forman los ejes  $x$  de ambos cuerpos. Las dimensiones del módulo son  $L \times W \times H$ , donde  $L$  es la longitud (eje  $x$ ),  $W$  la anchura (eje  $y$ ) y  $H$  la altura (eje  $z$ ). Cada hexaedro tiene una masa de  $m/2$  y una longitud de  $L/2$ .

En este modelo se está suponiendo que no existe colisión entre ambos hexaedros cuando se realiza la rotación, aunque tienen las mismas dimensiones.

El vector de posición del centro de masas se calcula utilizando la misma ecuación que en el caso alámbrico (ec. 1.1), considerando que la articulación está situada en el centro del módulo y que los extremos  $\vec{T}_i$  y  $\vec{D}_i$  son los puntos centrales de las caras exteriores del hexaedro izquierdo y derecho respectivamente.

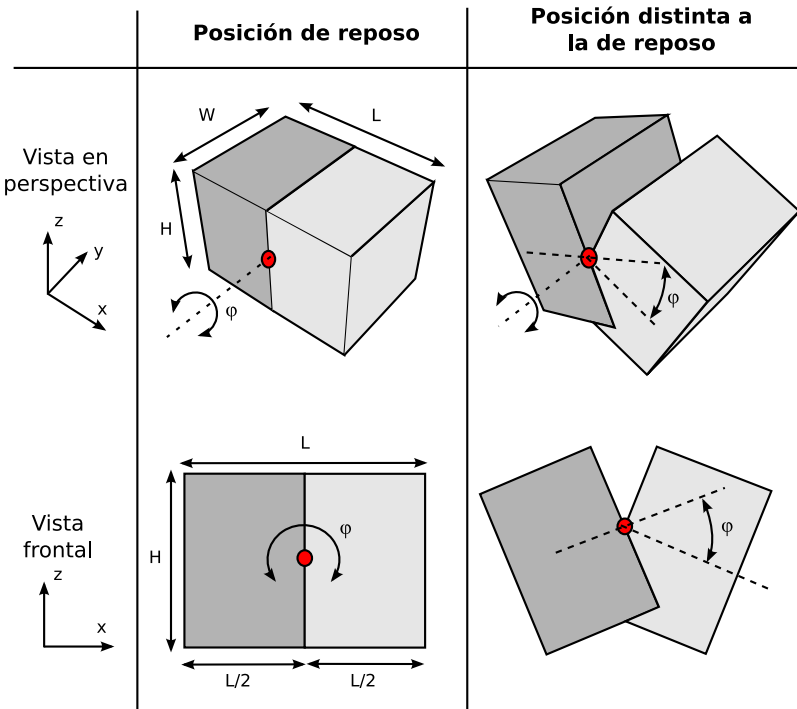


Figura 1.3: Parámetros del modelo hexaédrico

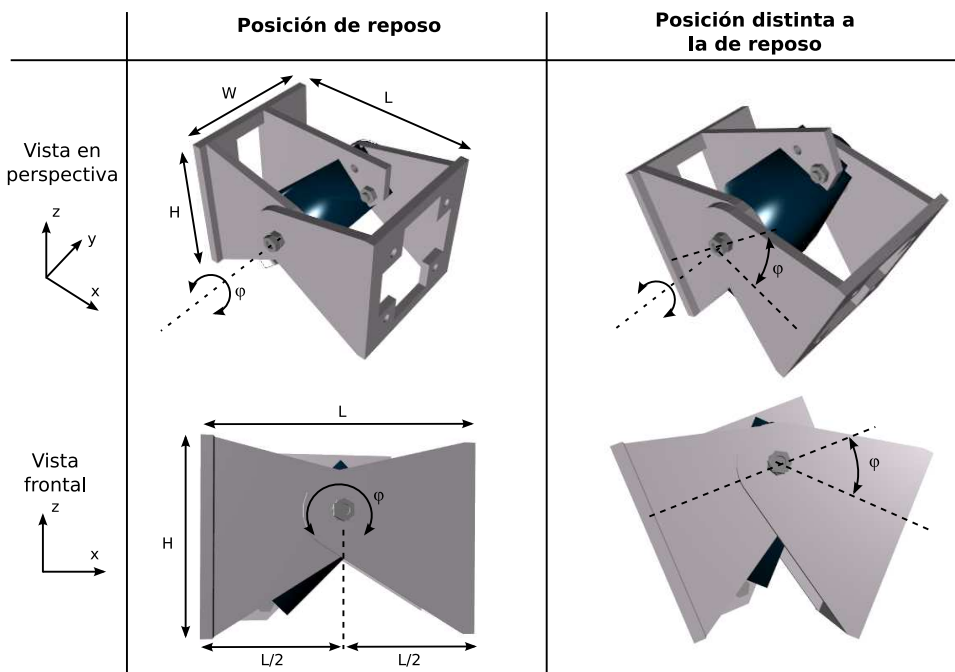


Figura 1.4: Módulo Y1, diseñado para la construcción de robots modulares

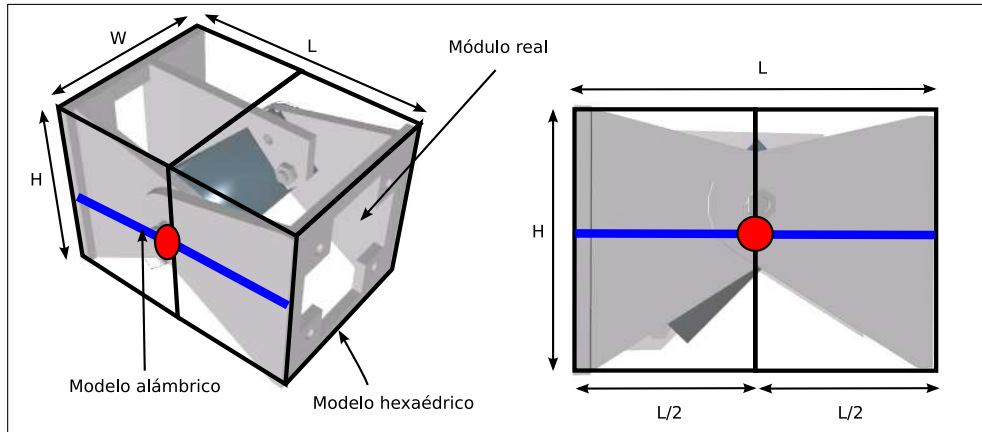


Figura 1.5: Comparación de los modelos: alámbrico, hexaédrico y real

### 1.2.3. Modelo real: módulo Y1

Para la realización de los experimentos se ha diseñado el **módulo Y1** (apartado ??). En la figura 1.4 se muestra su aspecto y sus parámetros, y en la figura 1.5 la relación con los modelos alámbrico y hexaédrico. El modelo hexaédrico tiene las mismas proporciones que el módulo Y1, de manera que es el mínimo hexaedro que contiene en su interior el módulo Y1. Obsérvese que el modelo hexaédrico es una aproximación del módulo real. Existen diferencias entre ellos: 1) el eje de giro del módulo Y1 no está exactamente en el centro. 2) Cuando el ángulo de doblaje es positivo, los puntos de contacto con el suelo difieren.

## 1.3. Modelos de robots ápodos

### 1.3.1. Parámetros

Los robots ápodos que se estudian en esta tesis son 1-modulares y por tanto existe sólo un único tipo de módulo. Están formados mediante la unión en cadena de  $M$  módulos iguales. Los parámetros que definimos son:

- **Número de Módulos( $M$ )**. Topológicamente este número no está acotado superiormente. Se puede pensar en robots ápodos de cualquier número de módulos. Pero en la práctica,  $M$  sí estará limitado por el consumo, el cableado, el par, etc. El valor inferior de  $M$  es 2 (ver capítulo ??). Por tanto,  $M \geq 2$ .
- **Longitud del robot ( $l$ )**. Los robots que estudiaremos están constituidos por módulos iguales, todos ellos de longitud  $L$ . Tenemos que  $l = M.L$

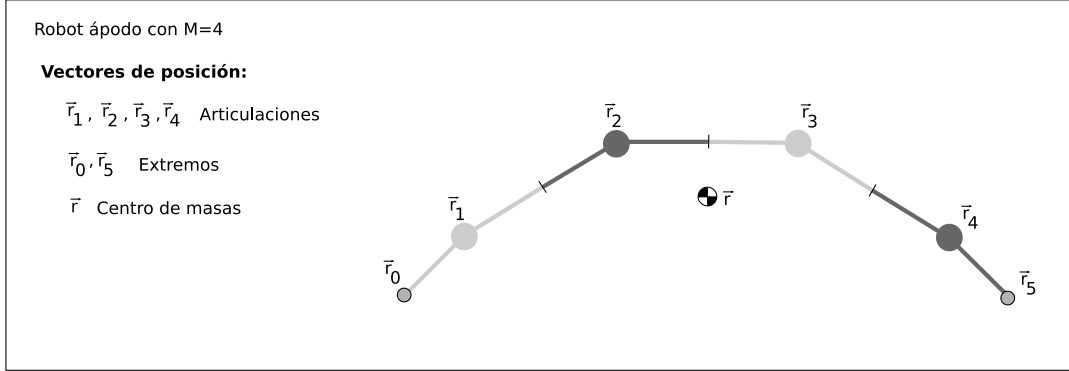


Figura 1.6: Centro de masas de un Robot ápodo de 4 módulos

- **Masa total del robot** ( $m_t$ ). Como los módulos son iguales, la masa total del robot será  $m_t = M.m$ , donde  $m$  es la masa del módulo.
- **Vector de posición** ( $\vec{r}$ ): Determina la posición del centro de masas del robot.

Cuando se utiliza el modelo alámbrico para describir a los robots ápodos de  $M$  módulos, utilizaremos en total  $M + 2$  puntos: los correspondientes a cada articulación más los dos extremos. Sus vectores de posición los denotaremos por  $\vec{r}_i$ , con  $i \in \{0 \dots M + 1\}$ , donde  $\vec{r}_1 \dots \vec{r}_M$  son los vectores de posición de las articulaciones de los módulos y  $\vec{r}_0, \vec{r}_{M+1}$  son los extremos izquierdo y derecho respectivamente.

### 1.3.2. Centro de masas

El centro de masas de un robot ápodo constituido por  $M$  módulos iguales se expresa en función de los vectores de posición de sus puntos ( $\vec{r}_0 \dots \vec{r}_{M+1}$ ) como se indica en la ecuación 1.4. Esta ecuación es genérica para cualquier robot modular de  $M$  módulos, independientemente del tipo de conexión empleada. En la figura 1.6 se muestra el centro de masas de un robot ápodo de cuatro módulos y los diferentes vectores de posición utilizados para su cálculo.

$$\vec{r} = \frac{1}{4M} \left( \vec{r}_0 + 3\vec{r}_1 + 4 \sum_{i=2}^{M-1} \vec{r}_i + 3\vec{r}_M + \vec{r}_{M+1} \right), M \geq 2 \quad (1.4)$$

Para la deducción de esta ecuación se ha aplicado la fórmula del centro de masas de un sistema de  $M$  puntos, cada uno de los cuales tiene de masa  $m$  (ec. 1.5).

$$\vec{r} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=M} \vec{r}_{cm_i} \quad (1.5)$$

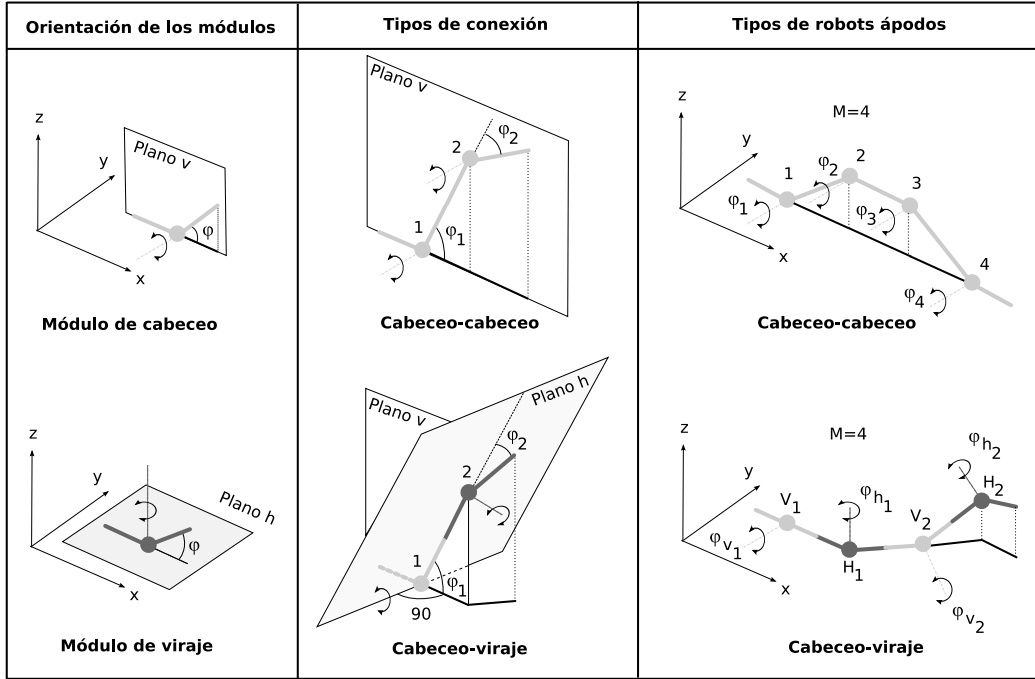


Figura 1.7: Orientación de los módulos, tipos de conexiones y configuraciones para los robots ápodos de estudio

Sustituyendo  $\vec{r}_{cm_i}$  por su valor calculado en 1.1 y reordenando se llega a 1.4. La deducción detallada se puede ver en el apartado ??.

### 1.3.3. Tipos de conexiones

El estudio de los robots se restringirá a los grupos con conexión cabeceo-cabeceo y cabeceo-viraje. En la figura 1.7 se muestra el modelo alámbrico para estos grupos, así como los dos tipos de conexionado entre módulos.

#### 1.3.3.1. Conexión cabeceo-cabeceo

El grupo cabeceo-cabeceo está formado por todos aquellos robots en los que sus módulos están conectados con la misma orientación, de manera que todos ellos giran en el mismo plano vertical. Este tipo de conexión la denominaremos conexión cabeceo-cabeceo (*Pitch-Pitch*). Por limitaciones mecánicas, estos robots sólo pueden desplazarse en una dimensión (adelante-atrás) y los emplearemos para el estudio de la locomoción en una dimensión. Las articulaciones las numeraremos desde 1 hasta  $M$ . Los ángulos de doblaje los expresaremos mediante  $\phi_i$ , con  $i \in \{1 \dots M\}$ .

### 1.3.3.2. Conexión cabeceo-viraje

Este grupo lo forman los robots en los que se alternan los módulos con orientación de cabeceo y de viraje (*pitch-yaw*). Los primeros los denominaremos verticales y los segundos horizontales. El número de módulos verticales será igual al de horizontales por lo que  $M$  será par. Así, para un robot de este grupo con  $M = 8$ , habrá cuatro módulos horizontales y otros cuatro verticales, situados de forma alterna.

Los robots de este grupo pueden adoptar diferentes formas en 3D por lo que sus articulaciones no están dentro de un mismo plano como en el caso de grupo cabeceo-cabeceo. Tienen la capacidad de poderse desplazar por un plano y serán los que utilizaremos para el estudio de la locomoción en 2D en el capítulo ??.

En este tipo de conexión, dos módulos consecutivos están rotados 90 grados uno con respecto al otro, como se muestra en la parte central de la figura 1.7. Se usará el módulo 1 como referencia, que por definición será de tipo vertical.

Utilizaremos dos tipos de notación para referirnos a estos módulos. Por un lado, cuando no sea importante para el razonamiento hacer distinción entre los módulos verticales y horizontales, se usará la misma notación que para el grupo cabeceo-cabeceo, numerando los módulos entre 1 y  $M$  y usando  $\phi_i$  para sus ángulos de doblaje. Cuando interese distinguir entre los dos tipos de módulos, usaremos  $V_i$  para los verticales y  $H_i$  para los horizontales, tomando  $i \in \{1 \dots \frac{M}{2}\}$ . Los ángulos de doblaje serán  $\phi_{v_i}$  y  $\phi_{h_i}$  respectivamente.

### 1.3.4. Bloques

#### 1.3.4.1. Concepto

La idea de bloques permite generalizar las ecuaciones que describen la forma del robot (apartados 1.6.3.2 y 1.6.4.5) y que serán usadas en los capítulos ?? y ?? para el análisis de la locomoción. Denominamos bloque a un conjunto de módulos que están conectados. A partir de la repetición de estos bloques se construyen los robots. Las configuraciones que estudiaremos están formados por el mismo tipo de bloques (son robots homogéneos en su estructura).

En la figura 1.8 se muestra un ejemplo del uso de bloques. Dado un robot modular de 8 módulos, podemos considerarlo como constituido por 8 bloques de un módulo. Sin embargo, si las articulaciones pares se fijan a sus puntos de reposo (con un ángulo de doblaje  $\phi_i = 0$ ) y sólo se actúa sobre las impares, el movimiento se puede estudiar como si fuese un robot equivalente compuesto por 4 bloques iguales. Las ecuaciones serán las mismas.

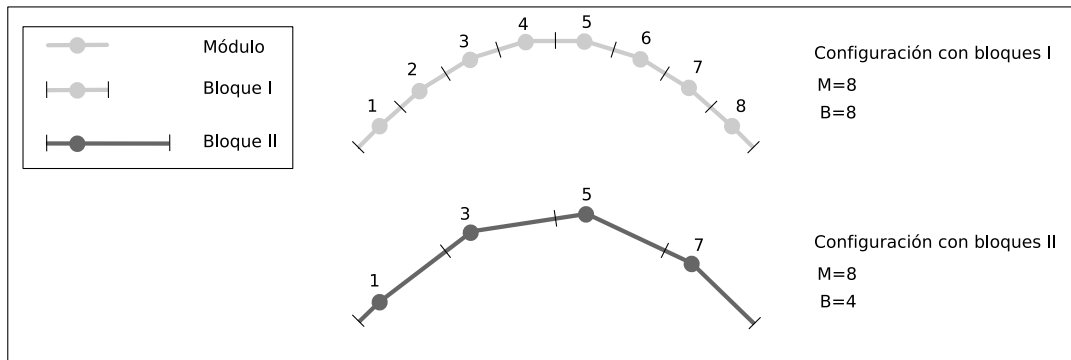


Figura 1.8: Ejemplo del concepto de bloque. Se muestra el mismo robot modular de 8 módulos pero usándose dos tipos de bloques. En la parte superior está compuesto de 8 bloques. En la inferior usa sólo 4.

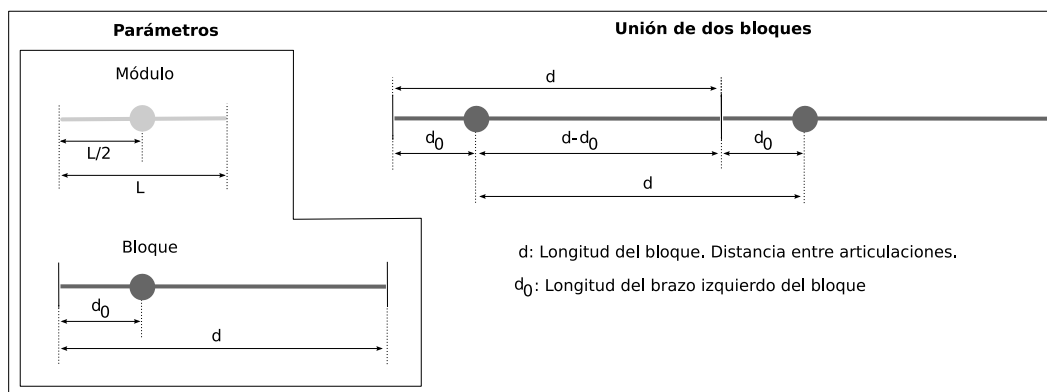


Figura 1.9: Parámetros del bloque

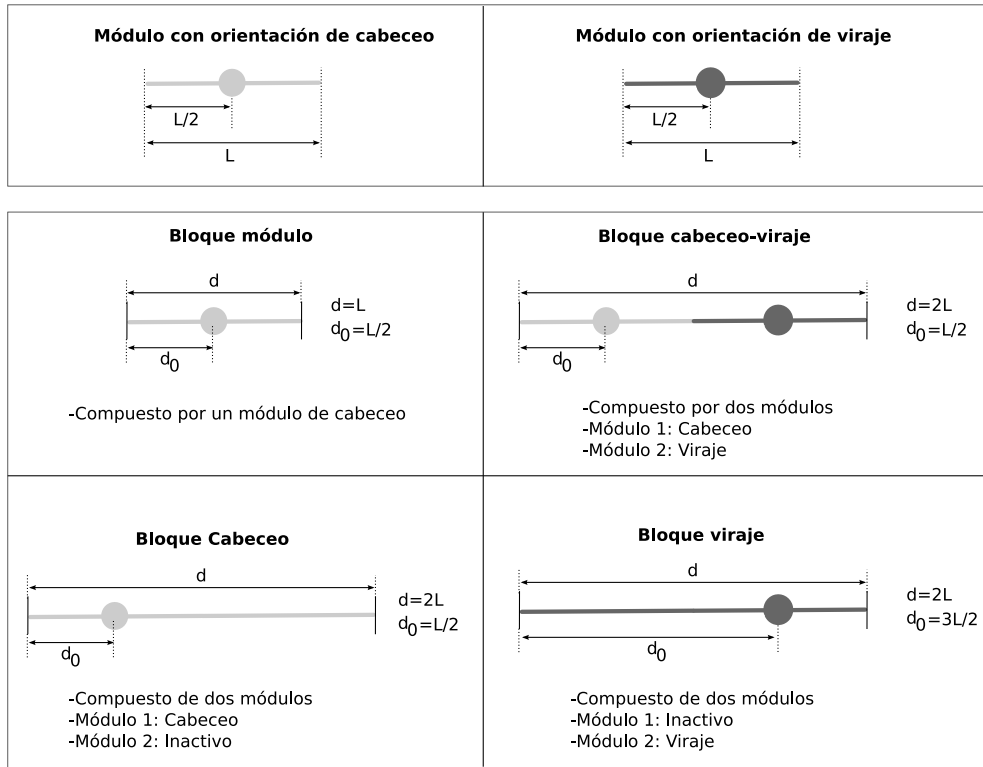


Figura 1.10: Parámetros de los cuatro tipos de bloques

#### 1.3.4.2. Parámetros

Para generalizar las ecuaciones, en vez de utilizarse los parámetros del módulo, usaremos los del bloque, mostrados en la figura 1.9. Son:

- **Longitud del bloque ( $d$ ).** Es el equivalente al parámetro  $L$  del módulo. Además,  $d$  coincide con la distancia que hay entre dos articulaciones de la misma orientación.
- **Longitud del brazo izquierdo ( $d_0$ ).** Los bloques creados pueden no ser simétricos, de manera que el segmento izquierdo sea diferente del derecho. El parámetro  $d_0$  indica la longitud del segmento izquierdo.

#### 1.3.4.3. Tipos de bloques

Los bloques que emplearemos para el estudio de la locomoción de los robots ápodos son los cuatro que se muestran en la figura 1.10. Son:

- **Bloque módulo.** Constituido por un único módulo con orientación de cabeceo. Es el bloque principal que se empleará para el estudio de la locomoción en línea recta.

Tipo de bloque	$d_0$	$d$	$d_0/d$
Bloque módulo	$L/2$	$L$	$1/2$
Bloque cabeceo-viraje	$L/2$	$2L$	$1/4$
Bloque cabeceo	$L/2$	$2L$	$1/4$
Bloque viraje	$3L/2$	$2L$	$3/4$

Cuadro 1.1: Tipos de bloques y valor de sus parámetros

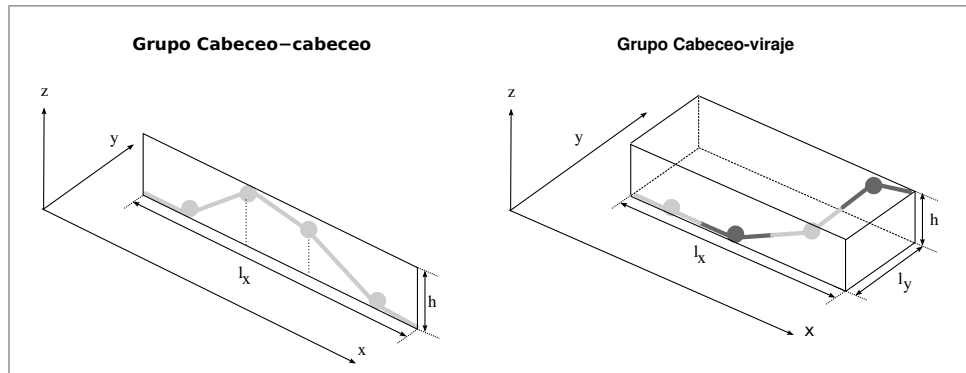


Figura 1.11: Dimensiones de los grupos Cabeceo-cabeceo y Cabeceo-viraje

- **Bloque cabeceo-viraje.** Formado por dos módulos, uno de cabeceo y otro de viraje. Es el bloque fundamental usado para el estudio de la locomoción en dos dimensiones.
- **Bloque cabeceo.** Tiene dos módulos, el primero de cabeceo y el segundo inactivo, en su posición de reposo ( $\varphi = 0$ ). Lo utilizaremos para estudiar la locomoción en línea recta de los robots de tipo cabeceo-viraje.
- **Bloque viraje.** Compuesto por dos módulos, de los cuales el primero está inactivo, en su posición de reposo y el segundo es de tipo viraje. Este bloque permite determinar las dimensiones de los robots de tipo cabeceo-viraje cuando se mueven en dos dimensiones y se utiliza una onda plana.

Los parámetros de cada bloque se expresan en función de los del módulo como se indica en la tabla 1.1

### 1.3.5. Dimensiones

Definiremos las dimensiones de un robot ápedo con conexión cabeceo-viraje como la altura ( $h$ ), anchura ( $l_x$ ) y grosor ( $l_y$ ) del mínimo hexaedro que contiene al robot. En el caso del grupo cabeceo-cabeceo, el robot está contenido en un plano por lo que definimos sus dimensiones como la altura ( $h$ ) y anchura ( $l_x$ ) del mínimo rectángulo que lo contiene. Estas ideas se muestran en la figura 1.11.

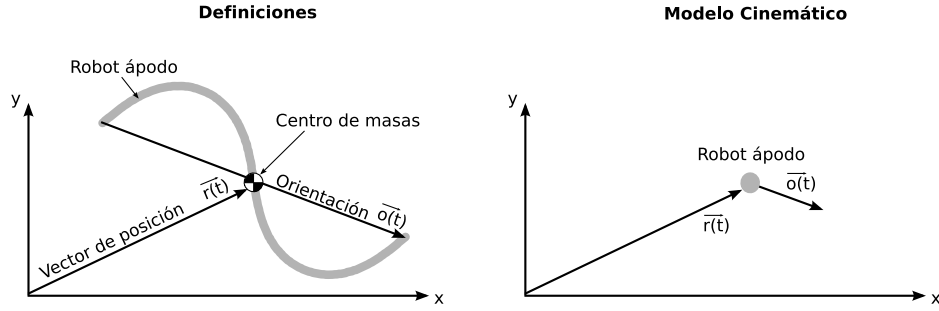


Figura 1.12: Modelo cinemático para los robots ápodos

## 1.4. Modelo cinemático

El estudio de la cinemática de los robots ápodos de los grupos de cabeceo-cabeceo y cabeceo-viraje los realizaremos representando el robot mediante un punto con orientación y estudiaremos su desplazamiento y su variación de la orientación en el plano  $xy$ .

### 1.4.1. Definiciones

Dado un robot ápodos que reposa en el plano  $z = 0$  y que tiene una forma cualquiera, definimos:

- **Vector de posición  $\vec{r}(t)$ :** Posición del centro de masas. La ecuación 1.4 expresa la relación entre  $\vec{r}(t)$  y los vectores de posición de las articulaciones y extremos.
- **Orientación  $\vec{o}(t)$ :** Vector que une el extremo izquierdo (cola) con el derecho (cabeza). Nos permite conocer la orientación que tiene el robot en un instante con respecto a un eje de referencia.

En la figura 1.12 se muestran los vectores  $\vec{r}(t)$  y  $\vec{o}(t)$  para un robot ápodos genérico, situado sobre el plano  $xy$ . En la parte de la derecha se ha representado su modelo cinemático: un punto en la posición  $\vec{r}(t)$  que apunta hacia la dirección dada por  $\vec{o}(t)$ .

### 1.4.2. Restricciones

Para hacer abordable el estudio de la locomoción de los robots ápodos asumiremos las siguientes restricciones.

1. **Superficies planas y sin obstáculos.** La locomoción de los robots ápodos se estudiará sobre superficies planas en las que no haya obstáculos. El plano de movimiento será el  $z = 0$

2. **Movimiento en régimen permanente.** El estudio se restringe al estado estacionario, donde la velocidad media del robot permanece constante y el modo de caminar es siempre el mismo. No se abordará el problema de las transiciones entre diferentes movimientos ni los cambios en la velocidad.
3. **Movimientos periódicos.** Asumiremos que los movimientos son periódicos, con periodo  $T$ . En cada ciclo, el robot realiza unos movimientos básicos bien coordinados que le permiten desplazarse. La locomoción se consigue repitiendo estos movimientos elementales. Por tanto, sólo es necesario estudiar el movimiento en un periodo. Modelar el movimiento con esta restricción es en realidad muy natural, y muy común en la robótica. Si se observan los movimientos de los animales cuando lo hacen sobre una superficie homogénea y de manera uniforme, se ve que son cíclicos. Mark Yim, en el robot Polybot[8], introdujo la idea de representar estos movimientos básicos usando unas tablas que especifican las posiciones de cada módulo en el tiempo. El movimiento se consigue recorriéndolas de manera cíclica. En los robots Scoporio[1] y Aramies[5] utilizan movimientos periódicos que son modulados por acciones reflejas.

### 1.4.3. Parámetros cinemáticos

Los parámetros cinemáticos que usaremos para el estudio de los robots ápodos son:

- **Paso:**  $\vec{\Delta r}$ . Es la distancia recorrida por el robot durante un ciclo (ec. 1.6). Como estamos suponiendo que el movimiento es en régimen permanente, periódico y que no hay obstáculos, el paso es independiente del instante  $t$ . En los puntos  $t$  y  $t + T$  el robot tendrá la misma forma. El paso nos indica la distancia recorrida y en qué dirección.

$$\vec{\Delta r} = \vec{r(t+T)} - \vec{r(t)} \quad (1.6)$$

- **Paso angular:**  $\Delta\gamma$ . Es el ángulo que ha rotado el robot con respecto al eje  $z$ . Se define como el ángulo que forma la orientación del robot en  $t + T$  con respecto a la orientación en  $t$  (ec. 1.7)

$$\Delta\gamma = \widehat{o(t+T) o(t)} \quad (1.7)$$

En la figura 1.13 se muestran el significado geométrico de los dos parámetros  $\vec{\Delta r}$  y  $\Delta\gamma$ , cuando el robot se ha desplazado durante un periodo  $T$ .

La velocidad lineal media del robot ápodo se calcula mediante la ecuación 1.8.

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta r}}{T} = \vec{\Delta r} \cdot f \quad (1.8)$$

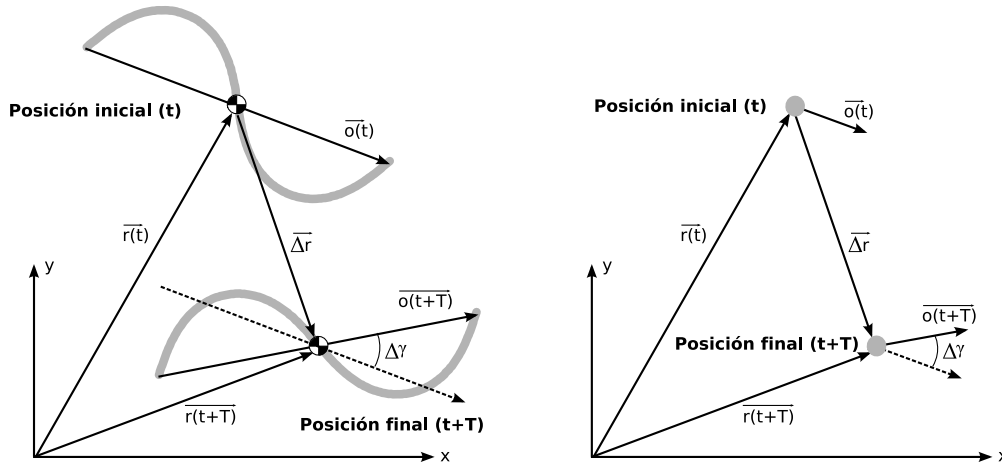


Figura 1.13: Parámetros cinemáticos de estudio

Esta velocidad es directamente proporcional al producto del **paso** y la **frecuencia**. Por ello, la velocidad aumentará bien porque los pasos sean mayores o bien porque los ciclos sean más cortos.

La **frecuencia** depende de la velocidad a la que se mueven las articulaciones. Un robot puede dar los mismos pasos a frecuencia baja, como si se moviese a cámara lenta, o frecuencia alta (las articulaciones se mueven más rápidamente). En ambos casos el paso  $\Delta \vec{r}$  se puede mantener constante. La frecuencia máxima está limitada por la velocidad de los motores. Y por tanto es un parámetro tecnológico.

Sin embargo, el **paso** depende exclusivamente de la coordinación entre las articulaciones, con independencia de la velocidad a la que se muevan. Si la coordinación no es adecuada, el paso será muy pequeño, nulo o incluso caótico. Por el contrario, en los movimientos bien coordinados, este valor será constante y no nulo. Además, el paso se puede variar, desde su valor máximo (“zancadas”) hasta los valores pequeños (“pasitos”).

Debido a que el paso es un parámetro que no depende de la tecnología, sino de la coordinación entre las articulaciones, es el elegido para el estudio de la locomoción.

#### 1.4.4. Especificación de movimientos

Para especificar el desplazamiento de un robot ápedo usaremos los **parámetros cinemáticos** paso y paso angular definidos en el apartado anterior. Estos nos determinan cómo se moverá su centro de masas. Sin embargo, será necesario establecer también **restricciones en las dimensiones** del robot. Por ejemplo, para que el robot sea capaz de moverse por el interior de un tubo, además de especificar su paso, habrá que asegurarse que su altura nunca supere el diámetro del tubo.

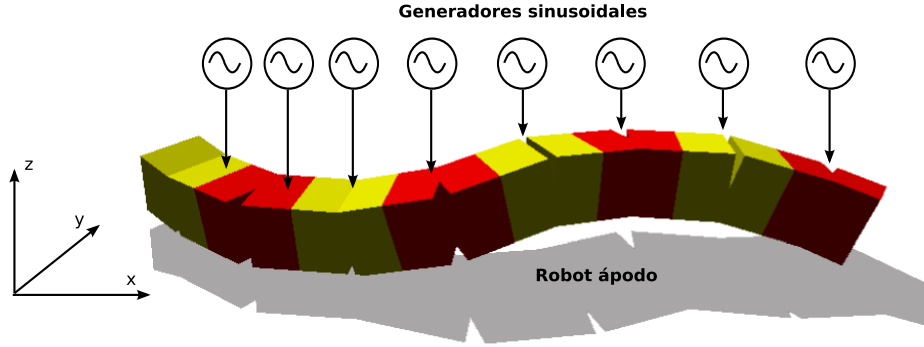


Figura 1.14: Modelo de control bioinspirado basado en generadores sinusoidales que hacen oscilar cada uno de los módulos de un robot modular

## 1.5. Modelo de control

El modelo empleado para la locomoción de los robots ápodos es bioinspirado y está basado en generadores sinusoidales que posicionan las articulaciones de manera independiente. La disposición de los generadores imita una espina dorsal formada por CPGs conectados en serie. El esquema general se muestra en la figura 1.14. Dado un robot ápodo de  $M$  módulos, existirán  $M$  generadores, cada uno asociado a un módulo.

### 1.5.1. Generadores sinusoidales

#### 1.5.1.1. Ecuaciones

El ángulo de doblaje de cada articulación en función del tiempo está dado por la expresión 1.9.

$$\phi_i(t) = A_i \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \Psi_i\right) + O_i \quad i \in \{1 \dots M\} \quad (1.9)$$

Cada generador  $i$  tiene los parámetros amplitud ( $A_i$ ), fase ( $\Psi_i$ ) y *offset* ( $O_i$ ) y todos con el mismo periodo  $T$ . Como se apuntó en el apartado ??, la frecuencia de oscilación de los diferentes CPGs que se encargan del movimiento de los animales son muy parecidas[3]. Por ello, en este modelo supondremos que oscilan con el mismo periodo  $T$ .

En el estudio de la coordinación, los parámetros que nos interesan son  $\vec{\Delta r}$  y  $\Delta\gamma$  para cada ciclo. Queremos conocer cómo varía la posición y orientación del robot en cada ciclo. El valor de la frecuencia no influye en esta coordinación, sino en la velocidad. Por ello utilizaremos como variable la fase ( $\phi$ ) en vez del tiempo y estudiaremos las posiciones de las articulaciones en función de ella. La ecuación 1.9 se reescribe como:

Símbolo	Descripción	Rango de valores
$\varphi_i$	Ángulo de doblaje del módulo $i$	$[-90, 90]$ Grados
$A_i$	Amplitud del generador $i$	$[0, 90]$ Grados
$\phi$	Fase	$[0, 360]$ ó $[-180, 180]$ grados
$T$	Periodo	$T > 0$ segundos
$\psi_i$	Fase del generador $i$	$[-180, 180]$ grados
$O_i$	Valor medio del generador $i$ ( <i>offset</i> )	$[-90, 90]$ grados
$M$	Número de módulos del robot	$M \geq 2$

Cuadro 1.2: Parámetros de los generadores sinusoidales empleados

$$\varphi_i(\phi) = A_i \sin(\phi + \Psi_i) + O_i \quad i \in \{1 \dots M\} \quad (1.10)$$

Para la simulación e implementación del movimiento se tendrá en cuenta que la fase varía linealmente con el tiempo según la expresión:

$$\phi(t) = \frac{2\pi}{T}t$$

#### 1.5.1.2. Parámetros

En la tabla 1.2 se muestran todos los parámetros, variables y constantes empleados. Los valores de los ángulos están expresados en grados. Para la fase  $\phi$  se utilizará bien el intervalo  $[0, 360]$  ó  $[-180, 180]$  según convenga.

El ángulo de doblaje de cada módulo se encuentra situado en el rango  $\varphi_i \in [O_i - A_i, O_i + A_i]$ . Como el rango máximo de movimiento de los módulos está limitado mecánicamente a 180 grados, que es el valor típico que tienen los servos comerciales, se debe cumplir la restricción siguiente:

$$|O_i| + A_i \leq 90 \quad (1.11)$$

#### 1.5.1.3. Significado geométrico de los parámetros

Cuando se aplica el modelo de generador sinusoidal al movimiento de los módulos, estos comienzan a oscilar. El rango total de giro está dado por la amplitud  $A$ . Cuando el *offset* es 0, la oscilación es simétrica con respecto a la posición de reposo y el ángulo de doblaje varía entre las posiciones  $A$  y  $-A$ . cuando el *offset* es distinto de cero, la oscilación no es simétrica. El ángulo de doblaje estará a una distancia menor de uno de los extremos que del otro. En este caso,  $\phi$  variará entre las posiciones  $A + O$  y  $O - A$ , como se muestra gráficamente en la figura 1.15.

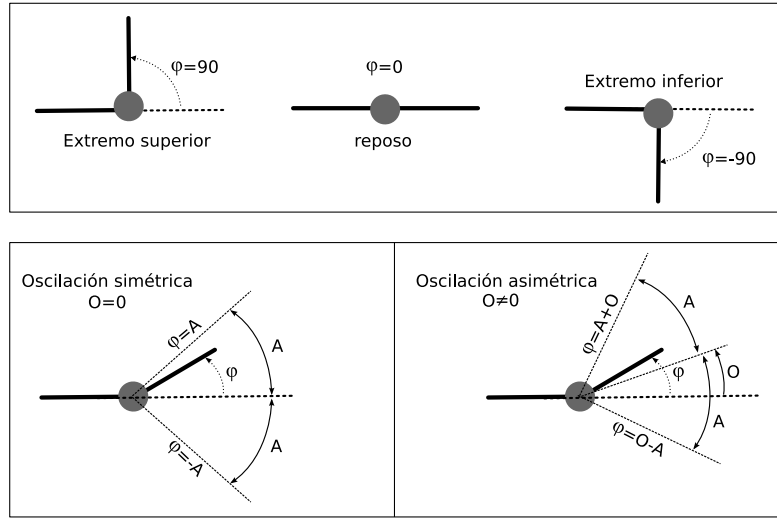
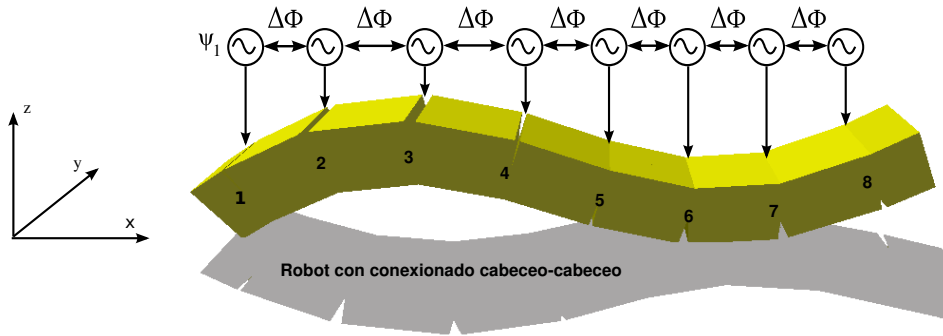
Figura 1.15: Significado geométrico de los parámetros  $\phi$ ,  $A$  y  $O$ 

Figura 1.16: Modelo de control para los robots del cabeceo-cabeceo

### 1.5.2. Modelo para el grupo cabeceo-cabeceo

El modelo de locomoción para los robots ápodos del grupo cabeceo-cabeceo lo forman  $M$  generadores sinusoidales de amplitud  $A$  y con una diferencia de fase entre dos módulos consecutivos ( $\Delta\Phi$ ) fija (figura 1.16). La ecuación que describe la oscilación del módulo  $i$  es:

$$\phi_i(\phi) = A \sin(\phi + (i-1)\Delta\phi + \psi_1), \quad i \in \{1 \dots M\} \quad (1.12)$$

La expresión se ha obtenido a partir de la ecuación general del generador sinusoidal (ec. 1.10) aplicando las siguientes restricciones:

1. **Todos los generadores tienen offset nulo** ( $O_i = 0$ ). Por tanto las oscilaciones son simétricas respecto a sus posiciones de reposo.

Parámetros	Descripción	Rango de valores
$A$	Amplitud de los generadores	$[0, 90]$ Grados
$\Delta\phi$	Diferencia de fase entre generadores consecutivos	$[-180, 180]$ grados

Cuadro 1.3: Parámetros de control para los robots ápodos del grupo cabeceo-cabeceo

2. **Todos los generadores tienen la misma amplitud  $A$ .** El recorrido angular que realizan es el mismo para todos los módulos. Con ello se consigue que oscilen de la misma manera.
3. **Origen de fases en módulo 1.** Las fases del resto de módulos se expresan en función del módulo 1, al que se le asigna el valor  $\psi_1$ .  $\psi_1$  establece la fase en el instante inicial. Tendrá importancia si se quiere que el robot comience su movimiento con una forma determinada. Sin embargo, el estudio lo hemos restringido al régimen permanente por lo que el valor de esta fase inicial no tiene importancia.
4. **Diferencia de fase fija entre generadores consecutivos.** Tomando como referencia los modelos biológicos de la lamprea, donde los experimentos han mostrado que la diferencia de fase entre los CPGs consecutivos permanece fija[7]. Así, para los módulos del 2 al  $M$ , la fase será:  $\psi_i = \psi_{i-1} + \Delta\Phi$ . Como el desfase es el mismo para todos, la ecuación anterior se puede escribir como:  $\psi_i = (i - 1)\Delta\phi$  con  $i \in \{1 \dots M\}$ .

La restricción 4 garantiza la aparición de ondas globales que recorren el cuerpo del robot haciendo que se desplace. Las restricciones 1 y 2 homogenizan todos los generadores, de manera que no existen generadores privilegiados, sino que son todos iguales. Una consecuencia de esto es que los robots presentan simetría de rotación. Si se giran 180 grados respecto a su eje corporal (se ponen boca abajo) se seguirán desplazando de la misma forma. La partes superior e inferior se comportan de la misma forma.

Después de aplicar todas las restricciones, **este modelo sólo precisa de dos parámetros** ( $A, \Delta\Phi$ ) para especificar los generadores y por tanto la coordinación, con independencia del número de módulos del robot. Por ello, **las soluciones al problema de la coordinación son puntos en un espacio de dos dimensiones**. Este espacio lo denominaremos **Espacio de control Homogéneo** y lo denotaremos por  $H_1$ .

En la tabla 1.3 están resumidos los parámetros de control de grupo cabeceo-cabeceo.

### 1.5.3. Modelo para el grupo cabeceo-viraje

Para el control de la locomoción de los robots del grupo cabeceo-viraje, los  $M$  generadores se dividen en dos grupos independientes, uno que actúa sobre los módulos de cabeceo (verticales) y otro sobre los de viraje (horizontales) (Figura 1.17). Las ecuaciones de oscilación para los módulos verticales ( $\phi_{v_i}$ ) y horizontales ( $\phi_{h_i}$ ) son:

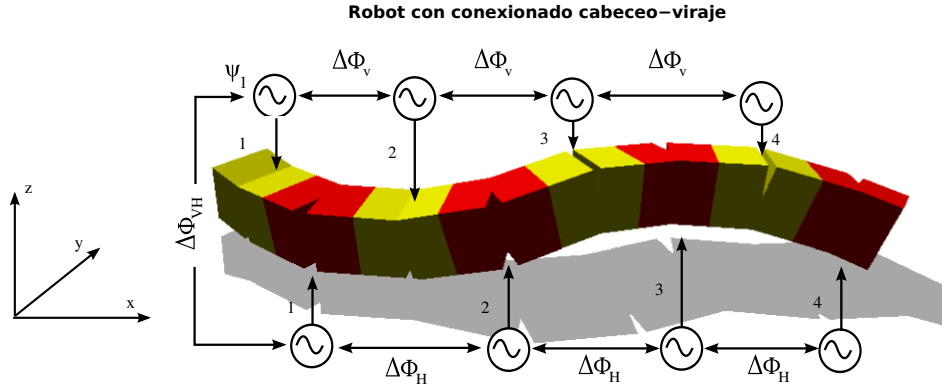


Figura 1.17: Modelo de control para los robots del cabeceo-viraje

$$\phi_{v_i}(\Phi) = A_v \sin(\Phi + (i-1)\Delta\phi_v), \quad i \in \left\{1 \dots \frac{M}{2}\right\}$$

$$\phi_{h_i}(\Phi) = A_h \sin(\Phi + (i-1)\Delta\phi_h + \Delta\phi_{vh}), \quad i \in \left\{1 \dots \frac{M}{2}\right\}$$

Ambas expresiones se han obtenido a partir de la ecuación general del generador sinusoidal (ec. 1.10) aplicando las siguientes restricciones:

1. **División de los generadores en dos grupos: horizontales y verticales.** Son grupos independientes, pero dentro de cada uno de ellos todos los osciladores son iguales, con los mismos parámetros.
2. **Módulos verticales homogéneos.** Mismas restricciones que para el grupo cabeceo-cabeceo:
  - a) El *offset* es nulo ( $O_{v_i} = 0$ ). (oscilación simétrica)
  - b) La amplitud es la misma para todos:  $A_v$
  - c) La diferencia de fase entre dos módulos verticales consecutivos es la misma ( $\Delta\phi_v$ ), por lo que  $\psi_{v_i} = (i-1)\Delta\phi_v$
3. **Módulos horizontales**
  - a) El *offset* es el mismo para todos ( $O_h$ ). Valores diferentes de cero son necesarios para realizar los giros circulares. En resto de movimiento se hace con oscilación simétrica.
  - b) La amplitud es la misma para todos:  $A_h$
  - c) La diferencia de fase entre dos módulos horizontales consecutivos es la misma ( $\Delta\phi_h$ ), por lo que  $\psi_{h_i} = (i-1)\Delta\phi_h + \psi_{h_1}$ , donde  $\psi_{h_1}$  es la fase del módulo horizontal 1.

Notación	Descripción	Rango
$A_v$	Amplitud de los generadores verticales	$[0, 90]$
$A_h$	Amplitud de los generadores horizontales	$[0, 90]$
$\Delta\phi_v$	Diferencia de fase entre generadores verticales consecutivos	$[-180, 180]$
$\Delta\phi_h$	Diferencia de fase entre generadores horizontales consecutivos	$[-180, 180]$
$\Delta\phi_{vh}$	Diferencia de fase entre los generadores verticales y horizontales	$[-180, 180]$

Cuadro 1.4: Parámetros de control para los robots ápodos del grupo cabeceo-viraje

4. **Origen de fases en módulo vertical 1.** Este será el modulo tomado como referencia con una fase  $\psi_{v_1}$ .
5. **Diferencia de fase entre módulos verticales y horizontales fija ( $\Delta\phi_{vh}$ ).** La coordinación entre los verticales y horizontales se establece mediante una diferencia de fase fija. Como hemos tomado como referencia el módulo vertical 1, el valor de la fase para el módulo horizontal 1 será:  $\psi_{h_1} = \Delta\phi_{vh} + \psi_{v_1}$ .

Las restricciones son similares que para el grupo cabeceo-cabeceo pero aplicadas tanto a las verticales como a las horizontales, cada una con sus propios parámetros. Una diferencia es que el grupo horizontal sí tiene un parámetro  $O_h$ . Valores del *offset* diferentes de cero para los módulos horizontales permitirá al robot desplazarse en trayectorias circulares. Sin embargo, si se prescinde de este movimiento, se puede suponer que  $O_h = 0$  y eliminar este parámetro del espacio de control.

La locomoción de los robots del grupo cabeceo-viraje en un plano se realiza mediante la superposición de las oscilaciones de los grupos de módulos horizontales y verticales. Ambas oscilaciones están ligadas por el parámetro  $\Delta\phi_{vh}$ .

El grupo vertical está caracterizado por los parámetros  $A_v$  y  $\Delta\phi_v$ , y el horizontal por  $A_h$ ,  $O_h$ ,  $\Delta\phi_h$  y  $\Delta\phi_{vh}$ . En total 6 parámetros. Por tanto, **las soluciones al problema de la coordinación para las configuraciones de cabeceo-viraje son puntos en un espacio de seis dimensiones**. Este espacio lo denominaremos **Espacio de control Homogéneo 2** y lo denotaremos por  $H_2$ .

#### 1.5.4. Espacios de control

Utilizando los generadores sinusoidales, el problema de la coordinación de los grupos de robots de cabeceo-cabeceo y cabeceo-viraje se reduce a la búsqueda de soluciones en los espacios  $H_1$  y  $H_2$  respectivamente.  $H_1$  tiene dos dimensiones y  $H_2$  seis. Las propiedades cinemáticas y de estabilidad de los diferentes movimientos se pueden estudiar encontrando relaciones entre los puntos de dichos espacios.

El espacio de control de los generadores sinusoidales, cuando no se aplican restricciones es mayor. Según lo expresado en la ecuación 1.9, para un robot de  $M$  módulos, con independencia de su

conexionado, se utilizan  $M$  generadores sinusoidales cada uno de los cuales tiene 3 parámetros independientes:  $A_i$ ,  $O_i$ ,  $\psi_i$ , lo que da un total de  $3M$  parámetros. Y por tanto, el espacio de control general,  $G$ , tiene una dimensión de  $3M$ .

En este espacio  $G$  se encuentran todas las soluciones. Cuanto mayor sea el número de módulos  $M$ , mayor será la dimensión de  $G$ . Esto concuerda con la idea intuitiva de que cuanto mayor sea el número de módulos, más cantidad de configuraciones de robots se podrán construir y mayores modos de caminar aparecerán.

Sin embargo, en esta tesis nos centramos en el estudio de los **principios de locomoción que son comunes a todas las topologías de una dimensión** con conexionado del tipo cabeceo-cabeceo y cabeceo-viraje, con independencia del número de módulos. Es decir, **que queremos encontrar los subespacios de mínima dimensión de  $G$  que hacen posible la locomoción de estos robots en una y dos dimensiones**. Son los espacios  $H_1$  y  $H_2$  y sus elementos los denominaremos **puntos de trabajo**.

### 1.5.5. Discusión sobre los generadores sinusoidales

El modelo de los generadores sinusoidales es bioinspirado y se obtiene por aproximación de los CPGs, cuando se alcanza el régimen permanente.

Sin embargo, es interesante ver la relación que tienen estos generadores con el problema de la coordinación, en el que se buscan las funciones genéricas  $\varphi_i(t)$  para lograr que el robot se desplace, usando diferentes modos de caminar.

Si partimos de la suposición de que las funciones  $\varphi_i(t)$  son periódicas (y como se apuntó en el apartado ?? esto cuadra con las observaciones y experimentos realizados por los biólogos), tendrán descomposición en serie de Fourier:

$$\varphi_i(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\frac{2\pi n}{T}t) + b_n \sin(\frac{2\pi n}{T}t))$$

Si las aproximamos por el primer armónico ( $n = 1$ ):

$$\varphi_i(t) \approx \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\frac{2\pi}{T}t) + b_1 \sin(\frac{2\pi}{T}t)$$

y realizando el cambio de variable  $a_1 = A_i \sin \psi_i$ ,  $b_1 = A_i \cos \psi_i$  y  $O_i = \frac{a_0}{2}$ , se llega a:

$$\varphi_i(t) = O_i + A_i \sin \psi_i \cos(\frac{2\pi}{T}t) + A_i \cos \psi_i \sin(\frac{2\pi}{T}t)$$

y aplicando la definición del seno de la suma de dos ángulos:

$$\varphi_i(t) = A_i \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \psi_i\right) + O_i$$

que es la expresión general de los osciladores sinusoidales (ec. 1.9).

Por tanto, cuando se emplean **generadores sinusoidales de frecuencia fija**, en realidad lo que se está haciendo **es restringir el problema de la coordinación a aquellas funciones que tienen sólo un único armónico**.

### 1.5.6. Cinemática directa e inversa

Los enunciados de la cinemática directa e inversa para los robots ápodos de los grupos de cabeceo-cabeceo y cabeceo-viraje se enuncian a partir de los espacios  $H_1$  y  $H_2$  de la siguiente manera:

**Cinemática directa** Dado un punto  $p$  perteneciente a  $H_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ ), determinar si existe locomoción, el tipo de movimiento, el valor de sus parámetros cinemáticos  $(\vec{\Delta r}, \Delta\gamma)$  y las dimensiones del robot.

**Cinemática Inversa** A partir de los parámetros cinemáticos  $\vec{\Delta r}$  y  $\Delta\gamma$ , el tipo de movimiento y opcionalmente restricciones en las dimensiones, encontrar el conjunto de puntos de trabajo  $\{p_i \in H_i\}$  que hacen que el robot se desplace de esa manera (y con esas dimensiones).

Para resolver estos problemas hay que establecer relaciones entre los parámetros de los generadores y los parámetros cinemáticos. Primero desarrollaremos el modelo matemático para establecer relaciones entre los puntos de trabajo y las formas del robot. En los capítulos ?? y ?? se establecen las relaciones entre esas formas y la locomoción.

## 1.6. Modelo matemático

El modelo matemático nos permite parametrizar la forma del robot. Al ser robots con topologías de una dimensión los podemos aproximar por curvas. Presentaremos las curvas utilizadas para la modelización de los grupos cabeceo-cabeceo y cabeceo-viraje: curvas serpentinoide y serpentinoide 3D. Para cada una de ellas, estudiaremos primero el modelo continuo, suponiendo que el ángulo de doblaje varía de forma continua a lo largo de la curva y después los discretizaremos.

Las ecuaciones obtenidas nos permiten conocer las dimensiones del robot y cuál es la relación con los parámetros de control de los generadores sinusoidales.

	Grupo cabeceo-cabeceo	Grupo cabeceo-viraje
<b>Tipo de Curva/onda</b>	Serpentinoide	Serpentinoide 3D
<b>Ángulo doblaje continuo</b>	$\theta(s)/\theta(s, \phi)$	$\theta_v(s)/\theta_v(s, \phi)$ $\theta_h(s)/\theta_h(s, \phi)$
<b>Ángulo doblaje discreto</b>	$\phi_i/\phi_i(\phi)$	$\phi_{v_i}/\phi_{v_i}(\phi)$ $\phi_{h_i}/\phi_{h_i}(\phi)$
<b>Parámetros</b>	$\alpha, k$	$\alpha_v, \alpha_h, k_v, k_h, \Delta\phi_{vh}$

Cuadro 1.5: Resumen de las curvas/ondas y parámetros empleadas en el modelo matemático de los robots del grupo cabeceo-cabeceo y cabeceo-viraje

### 1.6.1. Introducción: curvas y ondas

Los robots ápodos tienen una topología de 1D por lo que su forma, en un instante, se modela como una curva continua. La locomoción de estos robots es causada por los movimientos de su cuerpo. Definimos una onda corporal como una curva continua que varía su forma con la fase  $\phi$ . Así al hablar de curva nos referimos a la forma para una fase fija, mientras que con onda indicamos su variación con  $\phi$ .

Para definir las curvas usaremos la variable continua  $s$  que representa la distancia a lo largo del eje corporal. Un valor de  $s = 0$  es el punto situado en el extremo izquierdo y  $s = l$  es el extremo derecho, donde  $l$  es la longitud total. Las ondas, además de  $s$ , dependerán de  $\phi$ .

Las curvas las definiremos mediante el ángulo de doblaje. Para el grupo de los robots con conexión de tipo cabeceo-cabeceo, la curva está contenida en un plano y el ángulo de doblaje (continuo) lo representaremos como una función de  $s$ . Utilizaremos la notación  $\theta(s)$  para indicar que es un ángulo de doblaje de una curva continua, frente a  $\phi_i$  cuando es discreto. En el grupo de cabeceo-viraje, la curva está en un espacio de tres dimensiones y usaremos dos ángulos de doblaje para su descripción, denotados por  $\theta_v(s)$  para el cabeceo y  $\theta_h(s)$  para el viraje.

El modelo alámbrico del robot lo obtendremos discretizando la curva en los puntos en que se sitúan las articulaciones. Para obtener ecuaciones más genéricas, usaremos la idea de bloque presentada en el apartado 1.3.4 y obtendremos las ecuaciones en función de los parámetros  $d$  y  $d_0$ . Denotaremos por  $\phi_i$  al ángulo de doblaje de la articulación  $i$ , que estará situada en la posición  $s = d_0 + (i - 1)d$  de la curva. Para los robots del grupo cabeceo-viraje usaremos  $\phi_{v_i}$  y  $\phi_{h_i}$ . La discretización la realizamos como se indica en la expresión 1.13.

$$\phi_i = \theta(s)|_{s=d_0+(i-1)d} \quad (1.13)$$

Las curvas/ondas empleadas para el grupo cabeceo-cabeceo son las serpentinoides y para el grupo cabeceo-viraje las serpentinoides 3D. La información se resume en la tabla 1.5. En los siguientes apartados se estudian estas curvas y sus parámetros.

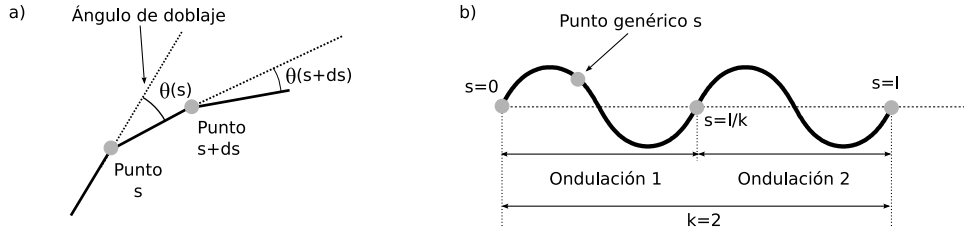


Figura 1.18: a) Ángulo de doblaje de una curva continua. b) Curva serpentinoide

## 1.6.2. Curva/onda serpentinoide

### 1.6.2.1. Definiciones

La **curva serpentinoide** fue descubierta por Hirose[6] cuando estudiaba los robots serpientes del grupo viraje-viraje. Se define como una curva en la que el ángulo de doblaje varía sinusoidalmente a lo largo del eje corporal (ec. 1.14)

$$\theta(s) = A \sin\left(\frac{2\pi k}{l}s\right) \quad (1.14)$$

El **ángulo de doblaje**  $\theta(s)$  se define como el que forman las tangentes a la curva que pasan por dos puntos separados una distancia  $ds$  (Figura 1.18a). La forma de la curva serpentinoide se muestra en la figura 1.18b. Es una curva periódica formada por  $k$  ondulaciones. El periodo es  $l/k$ , donde  $l$  es la longitud total. El trozo de curva comprendido entre  $s = 0$  y  $s = l/k$  lo denominaremos **ondulación**.

La **onda serpentinoide** la definimos como la curva serpentinoide en la que el ángulo de doblaje depende además de la fase  $\phi$  (ecuación 1.15)

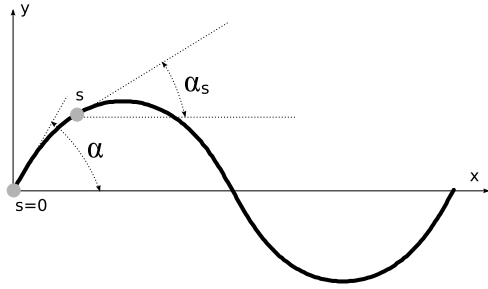
$$\theta(s, \phi) = A \sin\left(\phi + \frac{2\pi k}{l}s\right) \quad (1.15)$$

### 1.6.2.2. Formulación en coordenadas cartesianas

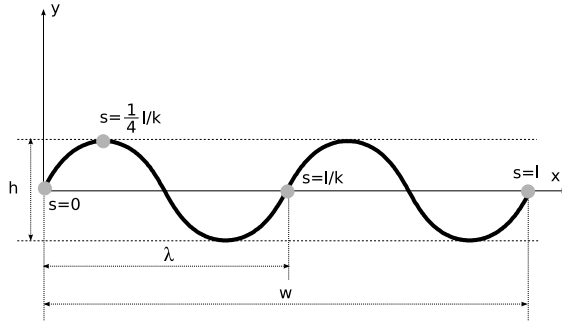
El ángulo que forma la tangente a la curva por el punto  $s$  con el eje  $x$  se denota por  $\alpha_s$ . Hirose[2] mostró que la expresión de  $\alpha_s$  viene dada por la ecuación 1.16.

$$\alpha_s = \alpha \cos\left(\frac{2\pi k}{l}s\right) \quad (1.16)$$

a) Ángulo de serpenteo



b) Dimensiones de la curva

Figura 1.19: Curva serpentina continua: a) Definición del ángulo de serpenteo  $\alpha$ . b) Dimensiones

donde el parámetro  $\alpha$  se denomina ángulo de serpenteo y se define como el ángulo que forma la pendiente que pasa por el punto de la curva  $s = 0$ . En la figura 1.19a) se muestran las definiciones de  $\alpha$  y  $\alpha_s$ .

Las coordenadas cartesianas  $x, y$  de los puntos de la curva se calculan mediante la integración de los cosenos y senos de  $\alpha_s$  respectivamente (ecuaciones 1.17 y 1.18).

$$x(s) = \int_0^s \cos(\alpha_s) ds = \int_0^s \cos\left(\alpha \cos\left(\frac{2\pi k}{l}s\right)\right) ds \quad (1.17)$$

$$y(s) = \int_0^s \sin(\alpha_s) ds = \int_0^s \sin\left(\alpha \cos\left(\frac{2\pi k}{l}s\right)\right) ds \quad (1.18)$$

Y para la onda serpentina las coordenadas están dadas por las ecuaciones 1.19 y 1.20.

$$x(s, \phi) = \int_0^s \cos\left(\alpha \cos\left(\phi + \frac{2\pi k}{l}s\right)\right) ds \quad (1.19)$$

$$y(s, \phi) = \int_0^s \sin\left(\alpha \cos\left(\phi + \frac{2\pi k}{l}s\right)\right) ds \quad (1.20)$$

Estas integrales no tiene solución analítica. Se resuelven numéricamente.

### 1.6.2.3. Dimensiones

Las dimensiones de la curva serpentina las definiremos como la altura ( $h$ ) y anchura ( $w$ ) del mínimo rectángulo que contiene la curva. Se muestran gráficamente en la figura 1.19b).

Dado que la curva serpentinoide está compuesta de  $k$  ondulaciones, las dimensiones las calcularemos considerando sólo la primera ondulación. La anchura de una ondulación es su longitud de onda  $\lambda$ , y la anchura total vendrá dada por la expresión:

$$w = k\lambda \quad (1.21)$$

El punto más alto de la primera ondulación de la serpentinoide es aquel en el que su tangente es paralela al eje  $x$  y su ordenada es positiva. Será el punto  $s_h$  que cumpla la condición:

$$\alpha_s(s_h) = 0 \wedge y(s_h) > 0$$

Es el que se encuentra en  $s_h = \frac{1}{4} \frac{l}{k}$ . La altura se calcula como el doble de su ordenada, ya que la primera ondulación es una función impar respecto a su punto medio, de manera que la altura de la cresta es igual en valor absoluto a la del valle (ec. 1.22)

$$h = 2y(s_h) = \int_0^{\frac{1}{4} \frac{l}{k}} \sin \left( \alpha \cos \left( \frac{2\pi k}{l} s \right) \right) ds \quad (1.22)$$

La longitud de onda  $\lambda$  es la abscisa del punto  $s_w$  situado a una distancia igual al periodo espacial, es decir,  $s_w = \frac{l}{k}$ . Por tanto, teniendo en cuenta las ecuaciones 1.21 y 1.17 se calcula la anchura total:

$$w = kx(s_w) = k \int_0^{\frac{l}{k}} \cos \left( \alpha \cos \left( \frac{2\pi k}{l} s \right) \right) ds \quad (1.23)$$

Las dimensiones de la onda serpentinoide son las mismas que las de la curva, ya que al variar la fase  $\phi$  lo que se obtiene es una curva desplazada hacia la derecha o la izquierda. En el desplazamiento ni la altura ni la anchura de la curva varían.

**Restricciones en el cálculo de las dimensiones** Las ecuaciones 1.22 y 1.23 para el cálculo de la altura y la anchura son válidas siempre que  $k \geq 1$  y  $\alpha \leq 90$ .

La restricción  $k \geq 1$  implica que la serpentinoide tiene al menos una ondulación completa y por tanto que existen al menos un valle y una cresta.

Por simplicidad, para valores de  $\alpha$  mayores de 90 grados calcularemos la anchura usando la ecuación 1.23, aunque en realidad se trate de una aproximación. En esas situaciones los extremos inicial y final no son los que tiene los valores máximos y mínimos de las abscisas.

#### 1.6.2.4. Dimensiones normalizadas

Definimos la **curva serpentinoide normalizada** como aquella que tiene longitud unitaria ( $l = 1$ ) y una única ondulación ( $k = 1$ ). Por ello, esta curva queda caracterizada por el parámetro  $\alpha$ . Definimos las **dimensiones normalizadas** como la altura y anchura de esta curva. A partir de las ecuaciones 1.22 y 1.23 se obtiene:

$$h_n(\alpha) = \int_0^{\frac{1}{4}} \sin(\alpha \cos(2\pi s)) ds \quad (1.24)$$

$$w_n(\alpha) = \int_0^1 \cos(\alpha \cos(2\pi s)) ds \quad (1.25)$$

Las dimensiones de la curva serpentinoide general en función de los parámetros  $\alpha$  y  $k$  se calculan a partir de las dimensiones normalizadas:

$$h(k, \alpha) = \frac{l}{k} h_n(\alpha) \quad (1.26)$$

$$w(k, \alpha) = l \cdot w_n(\alpha) \quad (1.27)$$

Estas expresiones se deducen a partir de 1.22 y 1.23 haciendo el cambio de variable  $u = \frac{k}{l}s$ .

De esta manera sólo estudiaremos las dimensiones normalizadas en función de  $\alpha$  y a partir de ellas se podrán obtener las dimensiones de cualquier curva con longitud  $l$  y con  $k$  ondulaciones.

#### 1.6.2.5. Parámetros y espacio de formas $h_1$

La curva serpentinoide queda caracterizada por los parámetros:  $\alpha$ ,  $k$  y  $l$ . Los robots ápodos que analizamos no varían su longitud durante la locomoción por lo que  $l$  será constante. Por ello la forma de la curva la caracterizaremos por  $\alpha$  y  $k$ . El ángulo de serpenteo  $\alpha$  determina la forma de cada ondulación y  $k$  el número de ondulaciones.

La forma de una curva serpentinoide, con  $k = 1$ , para diferentes valores de  $\alpha$  se muestra en la figura 1.20a). Para  $\alpha = 0$ , la curva se convierte en un segmento de longitud  $l$  sobre el eje  $x$ . Cuando  $\alpha = 90$  la curva es tangente al eje  $y$  en el origen. El valor de  $\alpha$  puede seguir aumentando hasta su valor máximo de 120 grados (figura 1.20b) en el que dos ondulaciones consecutivas son tangentes en un

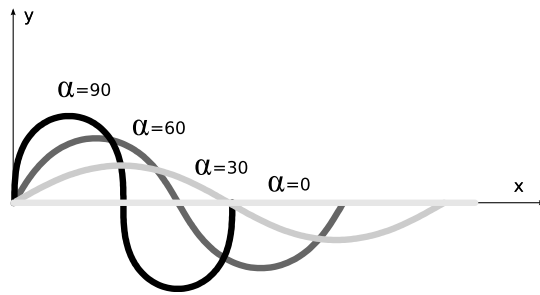
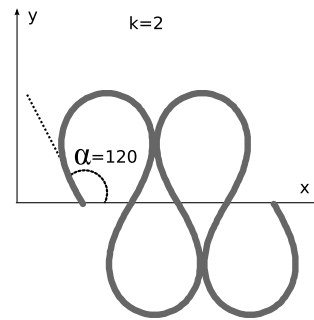
**a)** Forma y parámetro  $\alpha$ **b)** Valor máximo de  $\alpha$ 

Figura 1.20: Curva serpentinoide y ángulo de serpenteo  $\alpha$ . a) Variación de la forma con  $\alpha$ . b) Valor máximo de  $\alpha$

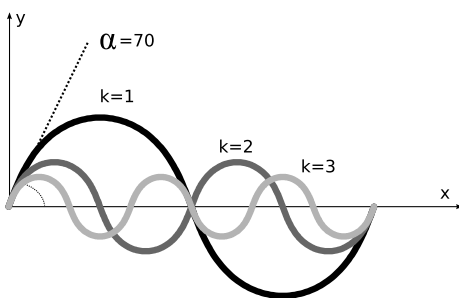
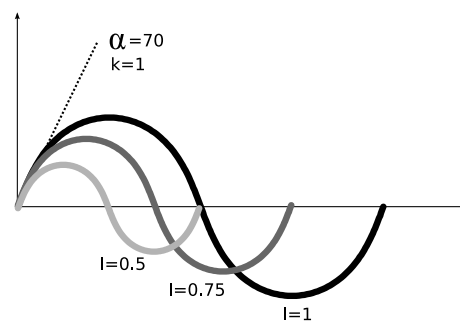
**a)** Forma y parámetro  $k$ **b)** Forma y parámetro  $l$ 

Figura 1.21: Curva serpentinoide y parámetros  $k$  y  $l$ . a) Variación de la forma con  $k$ . b) Variación con  $l$

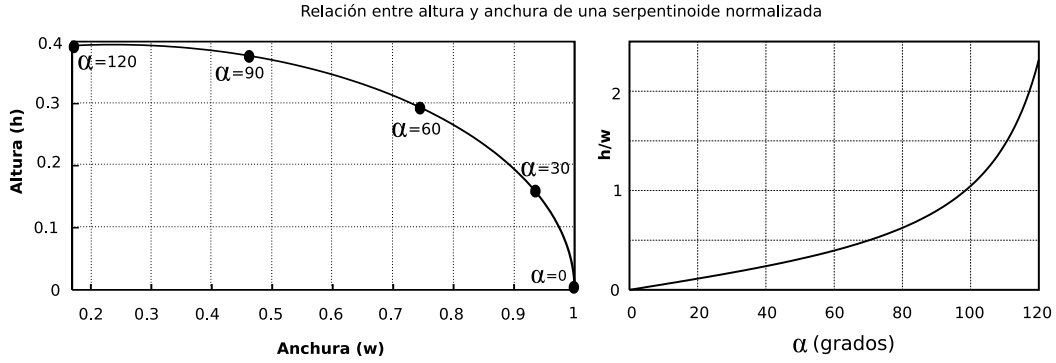


Figura 1.22: Relación entre altura y anchura de la curva serpentinoide en función de  $\alpha$

punto. Valores mayores de 120 grados no son posibles, ya que las articulaciones de robot chocarían entre sí. El rango de valores de  $\alpha$  es por tanto  $[0, 120]$  grados.

El parámetro  $k$  determina el número de ondulaciones (repeticiones) que hay en la curva serpentinoide (figura 1.21a). La altura de la curva es inversamente proporcional a  $k$  (ecuación 1.26) por lo que al aumentar las ondulaciones disminuye. En el modelo continuo  $k$  no está acotado. Si  $k \rightarrow \infty$ , la altura tenderá a 0 y en el límite será igual a un segmento situado sobre el eje  $x$ . La anchura de la serpentinoide, en el modelo continuo, no varía con  $k$  (ecuación 1.27).

El parámetro  $l$  sólo influye en el escalado de la curva, pero no en su forma, como se muestra en la figura 1.21b). Si se mantienen constantes  $\alpha$  y  $k$  la curva mantendrá sus mismas proporciones.

La forma de una curva serpentinoide, por tanto, queda caracterizada por los parámetros  $(\alpha, k)$ . Definimos el espacio  $h_1$  como aquel que tiene como elementos los pares  $(\alpha, k)$ . Este espacio lo emplearemos para definir la forma del robot y lo llamaremos **espacio de formas**.

#### 1.6.2.6. Relación entre altura y anchura

Las proporciones de la curva serpentinoide dependen del ángulo de serpenteo  $\alpha$ . En la figura 1.22 se muestra la relación entre la altura y la anchura en función de  $\alpha$ , para una curva serpentinoide normalizada. Cuando  $\alpha = 0$ , la curva es una recta de longitud unitaria sobre el eje  $x$ . Sus dimensiones serán  $h = 0$ ,  $w = 1$ . Al aumentar el ángulo de serpenteo, la anchura disminuye pero la altura aumenta.

#### 1.6.2.7. Curvas serpentinoide y senoidal

La forma de la curva serpentinoide se asemeja más a la de una curva senoidal cuanto menor sea el valor del ángulo de serpenteo. Para compararlas definimos la **curva senoidal equivalente** como aquella que tiene las mismas dimensiones  $h$  y  $w$  que una serpentinoide. La formulamos así:

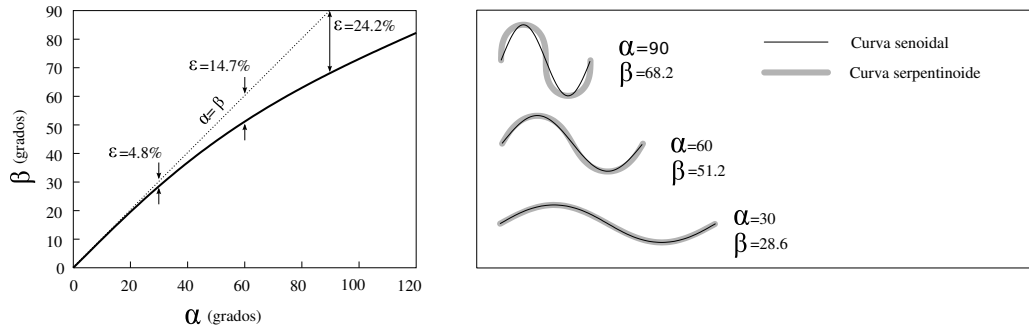


Figura 1.23: Comparación entre curvas serpentinoide y senoidal de las mismas dimensiones

Parámetro	Descripción	Rango de valores
$k$	Parámetro. Número de ondulaciones	$k \geq 1$
$\alpha$	Parámetro. Ángulo de serpenteo	$\alpha \in [0, 120]$ (grados)
$\phi$	Variable. Fase	$\phi \in (-180, 180]$
$l$	Constante. Longitud	$l > 0$

Cuadro 1.6: Parámetros, variables y constantes de caracterización de la onda serpentinoide

$$y = \frac{h}{2} \sin\left(\frac{2\pi k}{w}x\right), x \in [0, w]$$

Derivando con respecto a  $x$  y particularizando para  $x = 0$ , se obtiene la expresión de la tangente en el origen, con el que se calcula la pendiente en el origen:

$$\beta = \arctan\left(\frac{h}{w}\pi\right)$$

$\beta$  es el equivalente al parámetro  $\alpha$ , pero para curvas senoidales. La comparación entre  $\alpha$  y  $\beta$  se muestra en la figura 1.23. Para valores de  $\alpha$  menores de 46 grados, el error relativo es menor del 10 %

#### 1.6.2.8. Onda serpentinoide

La onda serpentinoide se caracteriza por los mismos parámetros  $\alpha$  y  $k$  de la curva serpentinoide, pero además los ángulos de doblaje dependen de la fase  $\phi$ . Por tanto, fijados  $\alpha$  y  $k$ , la forma de la onda cambia con  $\phi$ . En la figura 1.24 se muestra su forma en cuatro fases diferentes.

A modo de resumen, en la tabla 1.6 se listan los parámetros, variables y constantes de la onda serpentinoide.

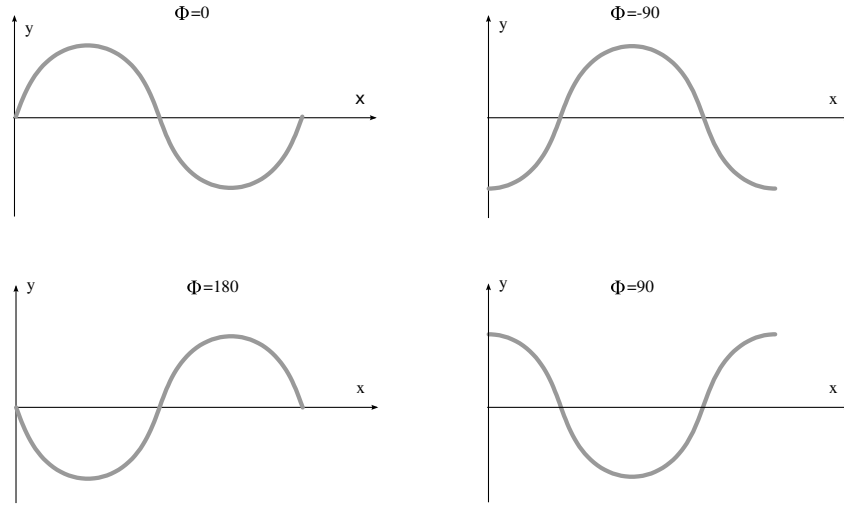


Figura 1.24: Forma de la onda serpentinoide para cuatro valores de la fase  $\phi$

### 1.6.3. Curva/Onda serpentinoide discreta

#### 1.6.3.1. Definiciones

La definición de curva serpentinoide discreta es la misma que para el caso continuo, pero considerando que el ángulo de doblaje varía de forma discreta con la variable  $i$ , en vez de manera continua con  $s$ . El ángulo de doblaje se expresa como indica la ecuación 1.28:

$$\varphi_i = A \sin(Bi) \quad (1.28)$$

La variable discreta  $i$  indica el número de articulación y varía entre 1 y  $M$ , siendo  $M$  el número total de módulos. Definimos el ángulo de serpenteo  $\alpha$  como aquel que forma el segmento izquierdo del módulo 1 con el eje  $x$ . La longitud total  $l$  se calcula como  $l = ML$ , donde  $L$  es la longitud de cada módulo.

Dada una curva serpentinoide continua de parámetros  $\alpha$ ,  $k$  y longitud  $l$ , se define su curva serpentinoide discreta equivalente de  $M$  módulos como aquella que tiene los mismos parámetros  $\alpha$ ,  $k$  y su misma longitud  $l$ .

Definimos el parámetro  $\alpha_i$  como el ángulo que forma el segmento izquierdo de la articulación  $i$  con el eje  $x$ . El ángulo de serpenteo  $\alpha$  es por definición igual a  $\alpha_1$ .

En la figura 1.25a) se muestra una curva serpentinoide discreta con  $\alpha = 60$ ,  $k = 1$  y 8 módulos. En la figura 1.25b) se compara una serpentinoide continua de  $\alpha = 60$  y  $k = 1$  con dos curvas serpentinoides discretas de 4 y 8 módulos.

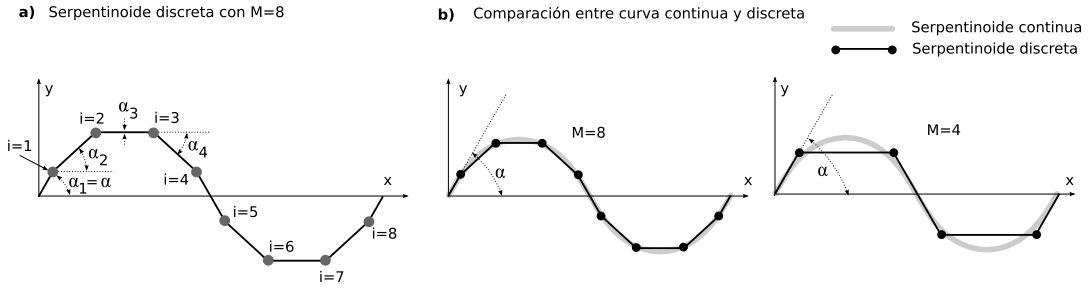


Figura 1.25: a) Curva serpentinoide discreta de 8 módulo ( $M = 8$ ). b) Comparación entre una curva serpentinoide continua de ángulo de serpenteo  $\alpha = 60^\circ$  y  $k = 1$ , con dos serpentinoides continuas de 4 y 8 módulos.

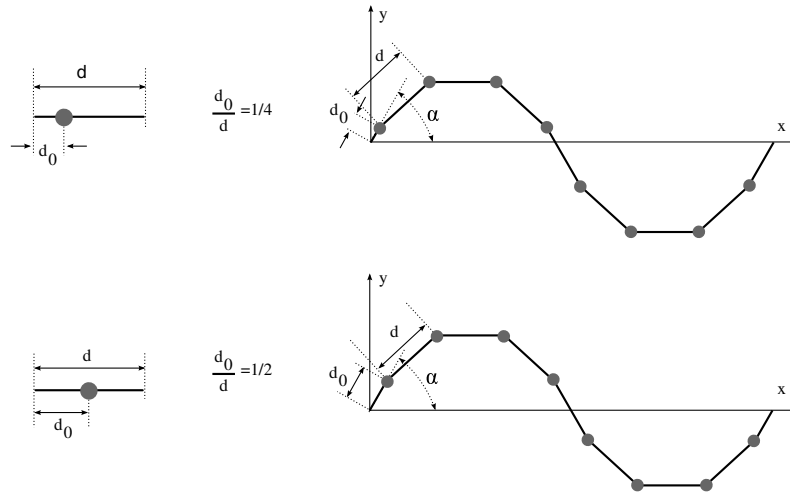


Figura 1.26: Dos curvas serpentinoides discretas de 8 bloques, para diferentes valores de los parámetros  $d$  y  $d_0$

En la onda serpentinoide discreta el ángulo de doblaje depende también de la fase  $\phi$ :

$$\varphi_i(\phi) = A \sin(\phi + Bi)$$

### 1.6.3.2. Bloques

La curva serpentinoide discreta está formada por  $M$  módulos iguales. Sin embargo, para que las ecuaciones sean más genéricas y se puedan aplicar en más casos utilizaremos el concepto de bloque definido en el apartado 1.3.4. Los parámetros de los bloques son  $d$  y  $d_0$ . En la figura 1.26 se muestran dos curvas serpentinoides de 8 bloques con diferentes valores de  $d$  y  $d_0$ . La curva superior es la empleada para modelar la locomoción en línea recta de los robots ápodos del grupo cabeceo-viraje. Con la inferior se describe el movimiento de los del grupo cabeceo-cabeceo.

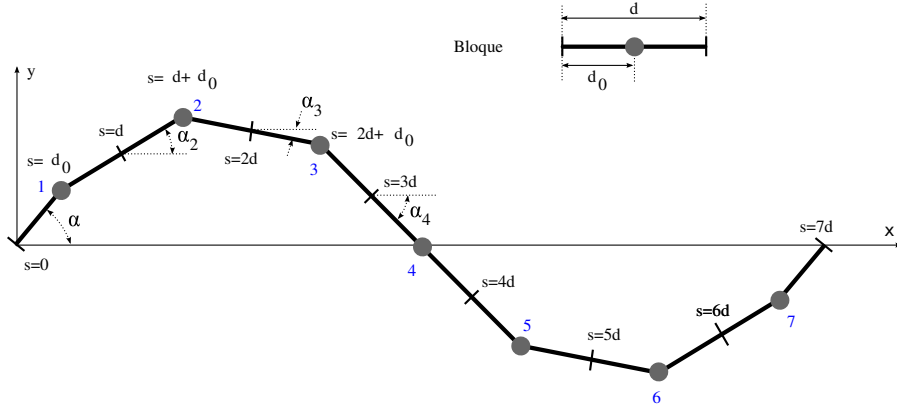


Figura 1.27: Notación empleada en la curva serpentinoide discreta. Ejemplo para  $M=7$

### 1.6.3.3. Formulación

Partiendo de una curva serpentinoide continua, las ecuaciones para la discreta se obtienen particularizando la variable  $s$  en los puntos de interés. Suponiendo que utilizamos el modelo de bloques, las articulaciones se encuentran en los puntos  $s = d_0 + (i-1)d$  y los puntos medios de unión entre los bloques están en  $s = (i-1)d$ , con  $i$  entre 1 y  $M$  (figura 1.27).

El ángulo que forman los segmentos de la curva con el eje  $x$ ,  $\alpha_i$ , se obtiene a partir de la ecuación 1.16 haciendo el cambio  $s = (i-1)d$  y teniendo en cuenta que  $l = Md$ :

$$\alpha_i = \alpha_s|_{s=(i-1)d} = \alpha \cos\left(\frac{2\pi k}{M}(i-1)\right), i \in \{1, M\}$$

Para la onda serpentinoide discreta, el ángulo con el eje  $x$  depende también de la fase:

$$\alpha_i(\phi) = \alpha \cos\left(\phi + \frac{2\pi k}{M}(i-1)\right), i \in \{1, M\}$$

Las coordenadas cartesianas  $(x, y)$  de cada articulación referidas al extremo izquierdo las definimos de manera recursiva:

$$x(i) = \begin{cases} d_0 \cos \alpha & i = 1 \\ x(i-1) + d \cos \alpha_i & i \in [2, M] \end{cases}$$

$$y(i) = \begin{cases} d_0 \sin \alpha & i = 1 \\ y(i-1) + d \sin \alpha_i & i \in [2, M] \end{cases}$$

Expandiendo se llega a la expresión final:

$$x(i) = d_0 \cos \alpha + d \sum_{\substack{j=2 \\ j \leq i}}^i \cos \alpha_j \quad (1.29)$$

$$y(i) = d_0 \sin \alpha + d \sum_{\substack{j=2 \\ j \leq i}}^i \sin \alpha_j \quad (1.30)$$

El ángulo de doblaje se obtiene a partir de la expresión 1.14 para valores de  $s = d_0 + (i-1)d$ :

$$\varphi_i = \theta(s)|_{s=(i-1)d+d_0} = A \sin \left( \frac{2\pi k}{M} \left[ (i-1) + \frac{d_0}{d} \right] \right)$$

Y usando la relación que encontró Ma[4] (ec. 1.39) entre la amplitud  $A$  y el ángulo de doblaje, la expresión final de  $\varphi_i$  en función de los parámetros  $\alpha, k, d, d_0$  y  $M$  es:

$$\varphi_i = 2\alpha \sin \left( \frac{\pi k}{M} \right) \sin \left( \frac{2\pi k}{M} \left[ (i-1) + \frac{d_0}{d} \right] \right) \quad (1.31)$$

Para la onda serpentinoide discreta, el ángulo de doblaje es:

$$\varphi_i(\phi) = 2\alpha \sin \left( \frac{\pi k}{M} \right) \sin \left( \phi + \frac{2\pi k}{M} \left[ (i-1) + \frac{d_0}{d} \right] \right) \quad (1.32)$$

Y las coordenadas cartesianas:

$$x(i, \phi) = d_0 \cos \alpha + d \sum_{\substack{j=2 \\ j \leq i}}^i \cos \left( \alpha \cos \left( \phi + \frac{2\pi k}{M} (i-1) \right) \right) \quad (1.33)$$

$$y(i, \phi) = d_0 \sin \alpha + d \sum_{\substack{j=2 \\ j \leq i}}^i \sin \left( \alpha \cos \left( \phi + \frac{2\pi k}{M} (i-1) \right) \right) \quad (1.34)$$

#### 1.6.3.4. Dimensiones

A diferencia del caso continuo, las dimensiones de la onda serpentinoide discreta depende de la fase  $\phi$ . La altura y anchura para una fase dada las denotaremos como  $h(\phi)$  y  $w(\phi)$  respectivamente. Definiremos las dimensiones  $(h, w)$  como el valor máximo de  $h(\phi)$  y  $w(\phi)$  en un ciclo:

$$h = \max \{h(\phi)\} \quad (1.35)$$

$$w = \max \{w(\phi)\} \quad (1.36)$$

**Altura** Para una fase dada, la altura se calcula con la expresión:

$$h(\phi) = y_{\max}(i, \phi) - y_{\min}(i, \phi) = y(i_{\max}, \phi) - y(i_{\min}, \phi)$$

donde  $y_{\max}(i, \phi)$  e  $y_{\min}(i, \phi)$  son los valores máximos y mínimos de la ordenada de la curva. Estos valores se alcanzan para las articulaciones  $i_{\max}$  e  $i_{\min}$ . En una onda serpentinoide continua, los puntos  $s_{\max}$  y  $s_{\min}$  donde se alcanzan los máximos y mínimos se obtienen igualando  $\alpha_s$  a cero. Despejando se obtienen las expresiones:

$$s_{\max} = \frac{l}{2\pi k} \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right), \quad s_{\min} = \frac{l}{2\pi k} \left( \frac{3\pi}{2} - \phi \right)$$

Haciendo el cambio de variable  $s = (i - 1)d$  y quedándose con la parte entera se obtienen  $i_{\max}$  e  $i_{\min}$ :

$$i_{\max} = E \left[ \frac{M}{2\pi k} \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) + 1 \right], \quad i_{\min} = E \left[ \frac{M}{2\pi k} \left( \frac{3\pi}{2} - \phi \right) + 1 \right]$$

Con lo cual, la expresión para calcular la altura de una onda serpentinoide es:

$$h = \max \{y(i_{\max}, \phi) - y(i_{\min}, \phi)\} \quad (1.37)$$

donde  $y(i, \phi)$  se obtiene con la ecuación 1.34.

**Anchura** La anchura será igual a la abscisa del extremo derecho. Y ésta a su vez es la abscisa de la articulación  $M$  más la proyección del segmento derecho del último módulo. Se obtiene con la expresión:

$$w(\phi) = x(M, \phi) + (d - d_0) \cos(\alpha_{M+1}(\phi))$$

La anchura total será su valor máximo durante el ciclo:

$$w = \max \{x(M, \phi) + (d - d_0) \cos(\alpha_{M+1}(\phi))\} \quad (1.38)$$

### 1.6.3.5. Espacios $h_1$ y $H_1$

La forma de una curva serpentinoide, tanto continua como discreta, queda caracterizada por los parámetros  $(\alpha, k)$ . Además están las constantes  $l$  (longitud) y  $M$  (número de módulos). Definimos el **espacio de formas**  $h_1$  como aquel que tiene como elementos los pares  $(\alpha, k)$ . Este espacio lo emplearemos para definir la forma del robot.

Como mostramos en el apartado 1.5.4, los parámetros del controlador  $(A, \Delta\phi)$  pertenecen al espacio de control homogéneo  $H_1$  y definen cómo es el movimiento de cada módulo y cómo se mueven con respecto al anterior.

Las relaciones entre ambos espacios se deducen a partir de la comparación entre las ecuaciones 1.12. Son las presentadas en las ecuaciones 1.39 y 1.32:

$$A = 2\alpha \sin\left(\frac{\pi k}{M}\right) \quad (1.39)$$

$$|\Delta\phi| = \frac{2\pi k}{M} \quad (1.40)$$

En el modelo de control, la diferencia de fase  $\Delta\phi$  puede tomar valores positivos y negativos mientras que en el modelo de matemático de la curva serpentinoide hemos usados sólo valores positivos, por eso en la ecuación 1.40 relaciona el valor absoluto de la diferencia de fase con  $k$  y  $M$ .

Las ecuaciones 1.40 y 1.39 permiten conocer la forma del robot a partir de los parámetros locales del controlador, y vice-versa, a partir de la forma encontrar qué parámetros del controlador hay que establecer.

Parámetro	Descripción	Rango de valores
$k$	Parámetro. Número de ondulaciones	$k \geq 1$
$\alpha$	Parámetro. Ángulo de serpenteo	$\alpha \in [0, 120]$
$M$	Constante. Número de articulaciones	$M \geq 2$
$d$	Constante. Distancia entre articulaciones	$d > 0$
$d_0$	Constante. Segmento izquierdo del módulo	$d_0 > 0$
$\phi$	Variable. Fase	$\phi \in (-180, 180]$
$i$	Variable. Número de articulación	$i \in \{1, M\}$

Cuadro 1.7: Parámetros, variables y constantes de caracterización de la curva/onda serpentinoide discreta

#### 1.6.3.6. Resumen de parámetros

El resumen de todos los parámetros, constantes y variables para la curva/onda serpentinoide discreta se muestra en la tabla 1.7.

### 1.6.4. Curva/onda serpentinoide 3D

#### 1.6.4.1. Definiciones

Dada una curva continua dentro de un espacio de tres dimensiones, definimos los parámetros  $\theta_v(s)$  y  $\theta_h(s)$  como los ángulos de doblaje vertical y horizontal respectivamente de un punto situado en  $s$  con respecto al que está en  $s + ds$ . Definimos la **curva serpentinoide 3D** como aquella en la que los ángulos de doblaje varían sinusoidalmente con  $s$ , según las expresiones:

$$\theta_v(s) = A_v \sin\left(\frac{2\pi k_v}{l}s + \psi_v\right)$$

$$\theta_h(s) = A_h \sin\left(\frac{2\pi k_h}{l}s + \psi_h\right)$$

Se trata de una curva que se forma por la superposición de dos serpentinoides, una en los planos de cabeceo y otra en los de viraje. Por ello, cada una de estas curvas tendrá su propio ángulo de serpenteo y número de ondulaciones. Utilizaremos el subíndice  $v$  para las articulaciones verticales y  $h$  para las horizontales. Tomando como origen de fases el punto  $s = 0$ , denotando por  $\Delta\phi_{vh}$  la diferencia de fases entre las verticales y las horizontales ( $\psi_h - \psi_v$ ), y utilizando la ecuación 1.39, la expresión de la **onda serpentinoide 3D** se puede expresar como:

$$\theta_v(s, \phi) = 2\alpha_v \sin\left(\frac{2\pi k_v}{M}\right) \sin\left(\phi + \frac{2\pi k_v}{l}s\right) \quad (1.41)$$

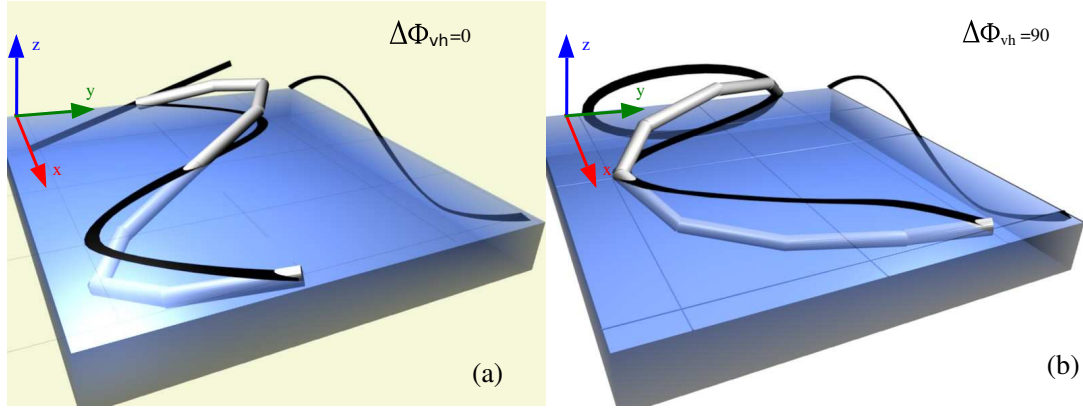


Figura 1.28: Diferentes formas de una serpentinoide 3D con  $k_v = k_h = 1$ . a) Cuando  $\Delta\Phi_{vh} = 0$ . b) Para  $\Delta\Phi_{vh} = 90$

$$\theta_v(s, \phi) = 2\alpha_h \sin\left(\frac{2\pi k_h}{M}\right) \left(\phi + \frac{2\pi k_h}{l}s + \Delta\phi_{vh}\right) \quad (1.42)$$

#### 1.6.4.2. Parámetros y espacio de formas $h_2$

Los parámetros para describir la serpentinoide 3D son 5:  $\alpha_v$ ,  $k_v$ ,  $\alpha_h$ ,  $k_h$  y  $\Delta\Phi_{vh}$ . Los pares  $(\alpha_v, k_v)$ ,  $(\alpha_h, k_h)$  caracterizan cada una de las dos serpentinoides vertical y horizontal respectivamente.  $\Delta\Phi_{vh}$  es un parámetro nuevo que establece la diferencia de fase entre las articulaciones verticales y las horizontales.

Este nuevo parámetro influye en cómo se realiza la superposición de las dos ondas. En la figura 1.28 se muestra un ejemplo de su efecto cuando  $k_v = k_h = 1$ . En la figura de la izquierda (a), la curva serpentinoide 3D está situada sobre un mismo plano, inclinado un ángulo con respecto al horizontal. Su proyección sobre el plano  $zy$  es una línea recta. En la derecha esta proyección es una elipse.

Definimos el espacio  $h_2$  como que tiene como elementos las tuplas  $(\alpha_v, k_v, \alpha_h, k_h, \Delta\Phi_{vh})$ . Los puntos de este espacio determinan la forma de la curva y cómo se propaga la onda.

#### 1.6.4.3. Familia de curvas/ondas serpentinoides 3D

La forma de la onda serpentinoide 3D determina las dimensiones del robot y el movimiento que realiza. Estableceremos una clasificación de las curvas en función de sus parámetros. Se resume en la figura 1.29.

Dividiremos las ondas en **isomorfas** y **no isomorfas**. En las primeras, los parámetros  $k_v$  y  $k_h$  son iguales por lo que la variación de los ángulos de doblaje verticales y horizontales es constante para

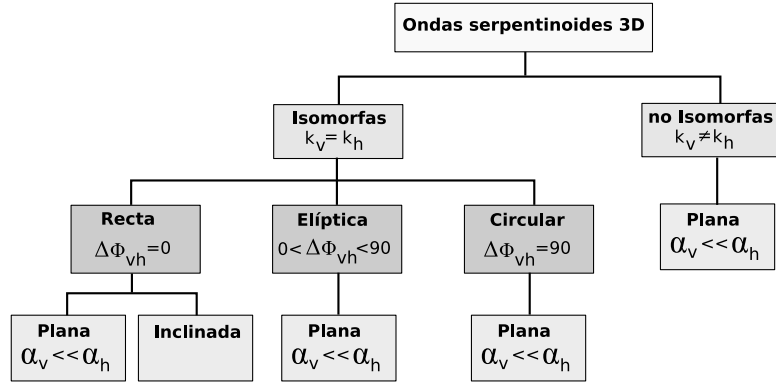
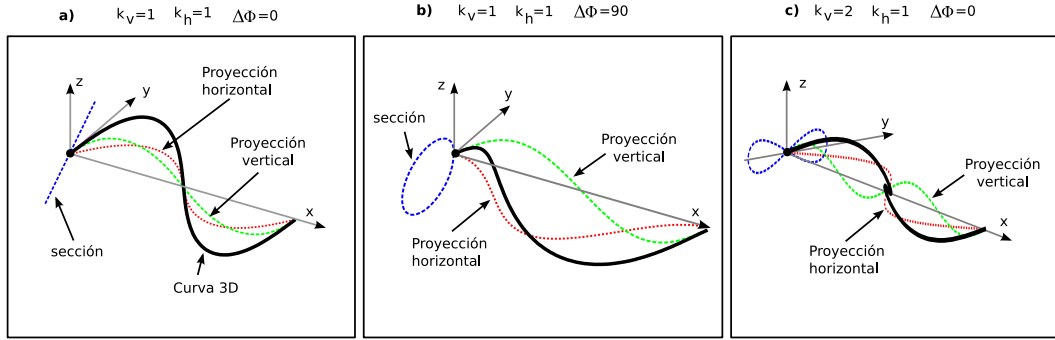


Figura 1.29: Clasificación de las ondas serpentinoides 3D

Figura 1.30: Ejemplos de ondas serpentinoides 3D. a) Isomorfa recta inclinada. b) Isomorfa elíptica. c) No isomorfa con  $k_v = 2k_h$ 

todos los puntos de la curva y aparece una onda global que recorre el cuerpo del robot. En las no isomorfas, la forma de la onda no es constante y depende de la fase.

Denominaremos **ondas planas** a aquellas en las que el ángulo de serpenteo de las verticales sea mucho menor que el de las horizontales ( $\alpha_v \ll \alpha_h$ ), de forma que la onda en realidad se puede aproximar por una onda serpentinoides sobre el plano  $z = 0$ .

Las ondas isomorfas las clasificaremos a su vez atendiendo a la forma de su sección, que viene dada por el parámetro  $\Delta\phi_{vh}$ . Así tendremos las **ondas rectas**, **elípticas** y **circulares**. Cuando  $\Delta\phi_{vh} = 0$ , la onda se propaga por un plano y su sección por tanto es una línea recta que forma un ángulo con el eje  $y$ . Este ángulo de inclinación depende de la relación entre  $\alpha_v$  y  $\alpha_h$ . Para las ondas planas el ángulo será 0. Por ello, las ondas isomorfas rectas las dividiremos en planas e inclinadas. Cuando  $\Delta\phi_{vh} = 90$  la la sección es circular y para  $0 < \Delta\phi_{vh} < 90$  elíptica.

En la figura 1.30 se muestran tres ejemplos de curvas 3D. La de la izquierda es una isomorfa recta inclinada. La central es una isomorfa elíptica y la de la derecha es no isomorfa, con  $k_v = k_h$ .

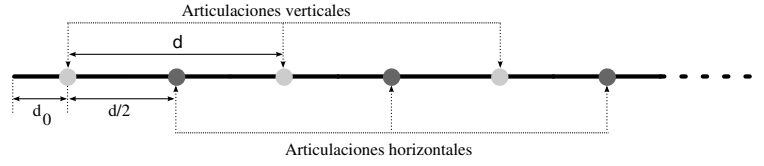


Figura 1.31: Modelo para las serpentinoides 3D discretas

#### 1.6.4.4. Dimensiones

De todos los tipos de ondas serpentinoides 3D, las que emplearemos para la locomoción en un plano serán las ondas planas. En ellas, la serpentinoide 3D se aproxima por una serpentinoide de parámetros  $\alpha_h$  y  $k_h$  y sus dimensiones  $l_x$  y  $l_y$  se pueden calcular aplicando las ecuaciones 1.38 y 1.37 para el modelo discreto y 1.25 y 1.24 para el continuo.

La altura se aproxima mediante las ecuaciones 1.37(discreto) y 1.24(contínuo) utilizando los parámetros  $\alpha_v$  y  $k_v$ .

#### 1.6.4.5. Modelo discreto

Para modelar la curva/onda serpentinoide 3D discreta utilizaremos bloques del tipo cabeceo-viraje, compuestos por dos articulaciones (figura 1.31). En este modelo, las articulaciones verticales están situadas en los puntos de la curva:  $s = (i-1)d + d_0$  y las horizontales en  $s = (i-1)d + d_0 + \frac{d}{2}$ , donde  $i$  es el número de articulación, comprendida entre 1 y  $M/2$ .

Los ángulos de doblaje  $\varphi_{v_i}(\phi)$  y  $\varphi_{h_i}(\phi)$  se obtienen particularizando las ecuaciones 1.41 y 1.42 en los puntos  $s$  donde están las articulaciones verticales y horizontales respectivamente:

$$\varphi_{v_i}(\phi) = \theta_v(\phi)|_{s=(i-1)d+d_0} = 2\alpha_v \sin\left(\frac{2\pi k_v}{M}\right) \sin\left(\phi + \frac{4\pi k_v}{M}\left(i-1 + \frac{d_0}{d}\right)\right) \quad (1.43)$$

$$\varphi_{h_i}(\phi) = \theta_h(\phi)|_{s=(i-1)d+d_0+\frac{d}{2}} = 2\alpha_h \sin\left(\frac{2\pi k_h}{M}\right) \sin\left(\phi + \frac{4\pi k_h}{M}\left(i-1 + \frac{d_0}{d} + \frac{1}{2}\right) + \Delta\phi_{vh}\right) \quad (1.44)$$

#### 1.6.4.6. Relación entre espacios $H_2$ y $h_2$

Los parámetros del espacio  $H_2$  se expresan a partir de los del  $h_2$  mediante las siguientes ecuaciones:

Notación	Descripción	Rango
$k_v$	Parámetro. Numero de ondulaciones en articulaciones verticales	$k_v \geq 1$
$k_h$	Parámetro. Numero de ondulaciones en articulaciones horizontales	$k_h \geq 1$
$\alpha_v$	Parámetro. Ángulo de serpenteo de las articulaciones verticales	$\alpha_v \in [0, 120]$
$\alpha_h$	Parámetro. Ángulo de serpenteo de las articulaciones horizontales	$\alpha_h \in [0, 120]$
$M$	Constante. Número de articulaciones	$M \geq 2$
$d$	Constante. Distancia entre articulaciones	$d > 0$
$d_0$	Constante. Segmento izquierdo del bloque	$d_0 > 0$
$\phi$	Variable. Fase	$\phi \in (-180, 180]$
$i$	Variable. Número de articulación	$i \in \{1, M/2\}$

Cuadro 1.8: Parámetros, variables y constantes de caracterización de la curva/onda serpentinoide 3D discreta

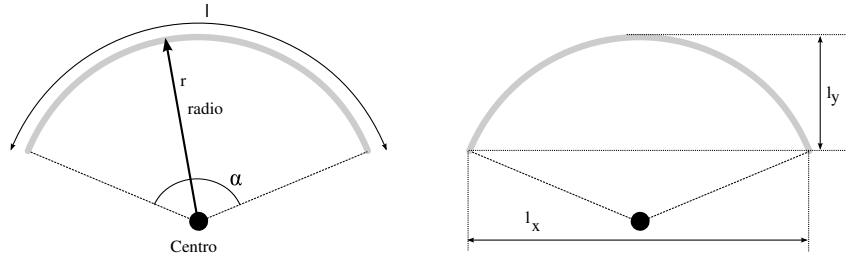


Figura 1.32: Parámetros y dimensiones de la curva circular

$$A_v = 2\alpha_v \sin \frac{2\pi k_v}{M}, \Delta\phi_v = \frac{4\pi k_v}{M} \quad (1.45)$$

$$A_h = 2\alpha_h \sin \frac{2\pi k_h}{M}, \Delta\phi_h = \frac{4\pi k_h}{M} \quad (1.46)$$

#### 1.6.4.7. Resumen de parámetros

Todos los parámetros, constantes y variables de la curva/onda serpentinoide 3D discreta se resumen en la tabla 1.8.

### 1.6.5. Curva/onda circular

#### 1.6.5.1. Modelo continuo

**Definiciones** Definimos una **curva circular** como aquella en la que el ángulo de doblaje  $\theta(s)$  es constante a lo largo de la curva. Por tanto, la curva tendrá forma de arco circular (1.32). Definimos el parámetro  $\alpha$  como el ángulo de este arco.

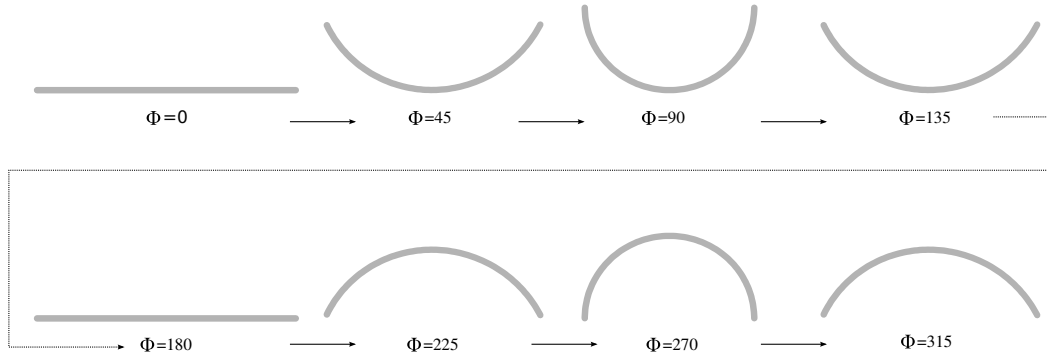


Figura 1.33: Ejemplo de onda circular con  $\alpha = 180$ . Se muestran las curvas circulares para diferentes valores de la fase  $\phi$  (y asumiendo una fase inicial  $\phi_0$  igual a 0)

Definimos una onda circular como aquella en la que  $\alpha$  varía con la fase  $\phi$  de manera senoidal, según la expresión:

$$\alpha(\phi) = \alpha \sin(\phi + \phi_0)$$

Donde  $\alpha$  ahora es el ángulo máximo del arco y  $\phi_0$  la fase inicial.

Como la longitud de la curva es  $l$ , el radio  $r$  está dado por la expresión:

$$r = \frac{180l}{\alpha\pi} \quad (1.47)$$

donde  $\alpha$  está expresado en grados.

**Parámetros** La curva se caracteriza por el parámetro  $\alpha$  que tiene un valor comprendido entre 0 y 360 grados. En la onda el arco tiene de ángulo  $\alpha(\phi)$  que varía con la fase. En la figura 1.33 se muestra la variación de la forma de una onda circular con  $\alpha = 180$  y  $\phi_0 = 0$ . Inicialmente la curva es una recta reposando sobre el eje  $x$ . Al variar la fase adopta la forma de un arco circular, de ángulo  $\alpha(\phi)$ . El ángulo aumenta hasta alcanzar el máximo  $\alpha$  para  $\phi = 90$ . A continuación disminuye hasta volver a ser una recta ( $\phi = 180$ ) y la operación se repite pero doblándose hacia el lado contrario. Para una fase de  $\phi = 220$  la curvatura es máxima.

**Dimensiones** Las dimensiones de una curva circular son  $l_x$  y  $l_y$ , como se muestra en la figura 1.32. Dependen del parámetro  $\alpha$  y de la longitud  $l$  de la curva. Se calculan mediante las ecuaciones:

$$l_x = \frac{2l}{\alpha} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

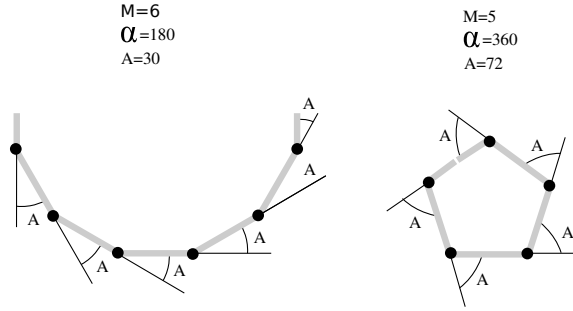


Figura 1.34: Ejemplo de dos curvas circulares discretas

$$l_y = \frac{l}{\alpha} \left( 1 - \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right)$$

**Relación con curva serpentinoide** La curva circular se obtiene a partir de una curva/onda serpentinoide cuando el ángulo de serpenteo  $\alpha$  es 0y se está aplicando un *offset* distinto de cero. Lo que se obtiene es una curva circular, que no varía con  $\phi$ . Se utilizará en el capítulo ?? para describir los giros.

La onda circular se obtiene a partir de una onda serpentinoide en la que  $k = 0$ . Teniendo en cuenta la ecuación 1.40,  $k = 0$  implica que la diferencia de fase  $\Delta\phi$  entre dos articulaciones consecutivas es 0, por lo que todas ellas están en fase y su ángulo de doblaje es el mismo. Este ángulo varía con  $\phi$  haciendo que la onda cambie de forma (como en el ejemplo de la figura 1.33).

### 1.6.5.2. Modelo discreto

La curva circular discreta se caracteriza porque sus  $M$  articulaciones tienen todas el mismo ángulo de doblaje  $A$ , que es igual a  $\alpha/M$ :

$$\varphi_i = A = \frac{\alpha}{M} \quad (1.48)$$

y la onda circular discreta:

$$\varphi_i(\phi) = A \sin(\phi + \phi_0) = \frac{\alpha}{M} \sin(\phi + \phi_0)$$

El valor de  $A$  máximo es de 90 grados, por limitaciones mecánicas en la implementación de las articulaciones por lo que se tiene que cumplir la siguiente restricción:

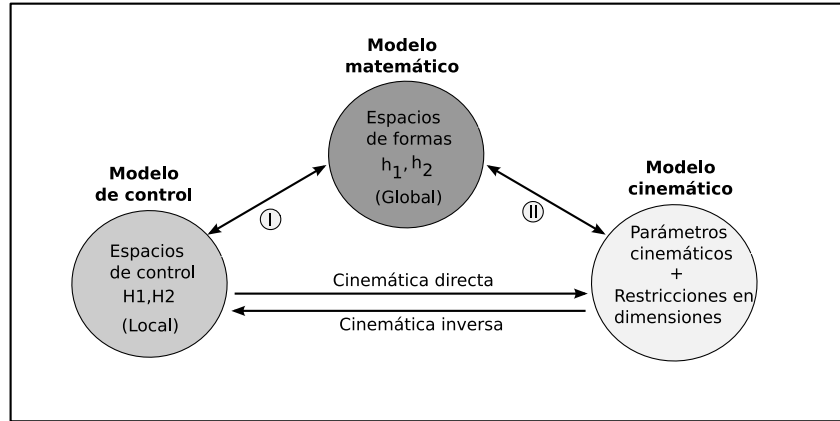


Figura 1.35: Relaciones entre los diferentes modelos

$$\frac{\alpha}{M} \leq 90$$

En la figura 1.34 se muestran dos curvas circulares discretas con diferentes valores de sus parámetros.

## 1.7. Conclusiones

En este capítulo hemos presentado los modelos que emplearemos para el estudio de la locomoción de los robots ápodos de los **grupos cabeceo-cabeceo y cabeceo-viraje**. Con el primer grupo analizaremos el desplazamiento unidimensional y con el segundo el bidimensional. Todos los robots los modelamos como una serie de **bloques iguales** unidos entre sí. Cada bloque lo forman uno o más **módulos iguales**, con conexión de tipo cabeceo o viraje. Para la descripción matemática utilizamos el **modelo alámbrico**, para la simulación en **modelo hexaédrico** y en los experimentos un **módulo real**.

Para hacer abordable el estudio de la locomoción asumiremos que el medio por el que los robots se desplazan es uniforme y sin obstáculos y nos ceñiremos al régimen permanente. El desplazamiento de los robots lo supondremos periódico con una duración de ciclo  $T$ . Así, la traslación de un punto a otro es debida a la repetición periódica de unos movimientos básicos. El problema a resolver es cómo coordinar todas las articulaciones para generar esos movimientos elementales en cada ciclo.

En esta tesis abordaremos este problema desde tres ámbitos diferentes: cinemática, control y forma del robot (figura 1.35) y lo resolveremos estableciendo relaciones cuantitativas y cualitativas entre ellos, que son verificadas mediante experimentos. En este capítulo proponemos los modelos y presentamos las ecuaciones que relacionan los parámetros de control con la forma del robot.

El **modelo cinemático** se caracteriza por los parámetros **paso** ( $\vec{\Delta r}$ ) y **paso angular** ( $\Delta\gamma$ ), que indican la traslación y rotación del centro de masas del robot por cada ciclo. Además, el robot tiene unas dimensiones que imponen restricciones (como por ejemplo el movimiento en el interior de un tubo, donde la altura del robot tendrá que limitarse).

El **modelo de control** propuesto es bioinspirado y consta de generadores sinusoidales que hacen oscilar cada una de las articulaciones de manera independiente. Se han definido los **espacios de control**  $H_1$  y  $H_2$  formados por tuplas con los parámetros de los generadores. Estos espacios son los que tienen la **mínima dimensión y permite mover robots ápodos de cualquier número de módulos**. Estos movimientos no tienen por qué ser óptimos. Añadiendo más parámetros se podría, en principio, encontrar soluciones mejores.

A partir de estos modelos se pueden enunciar con más precisión los problemas de la cinemática directa e inversa, que establecen relaciones entre el modelo de control y de locomoción. En la **cinemática directa** se parte de los valores aplicados a los controladores y se determinan los parámetros cinemáticos, el tipo de movimiento y las dimensiones del robot. En la **cinemática inversa** se buscan los valores de los parámetros de control para que el robot se mueva con un tipo de movimiento y con unos valores de los parámetros cinemáticos dados, además de cumplirse también ciertas restricciones en las dimensiones.

Para resolver la cinemática directa e inversa se desarrolla el **modelo matemático** con el que se parametriza la forma del robot y se definen los **espacios de formas**  $h_1$  y  $h_2$ . Cada punto de estos espacios está asociado a una forma del robot. Se han presentado las ecuaciones que relacionan los espacios de control con los de formas. Los robots ápodos tienen una topología de una dimensión por lo que su forma se describe mediante curvas y el movimiento mediante ondas que se propagan. Al utilizarse un modelo de control basado en oscilaciones sinusoidales, las formas de los robots se describen mediante **curvas y ondas serpentínoides**. Para las serpentínoides 3D, se ha establecido una clasificación en función de cómo se propagan y de las formas que presentan. Esto será usado en el capítulo ?? para el estudio de la locomoción de la locomoción en un plano. Cada grupo de serpentínoides 3D tendrá asociado un movimiento diferente.



# Bibliografía

- [1] S. Dirk and F. Kirchner. The Bio-Inspired SCORPION Robot: Design, Control and Lessons Learned. In Houxiang Zhang, editor, *Climbing and Walking Robots, Towards New Applications*, pages 197–218, Vienna, Austria, October 2007. I-tech Education and Publishing.
- [2] S. Hirose. *Biologically Inspired Robots (Snake-like Locomotor and Manipulator)*. Oxford Science Press, 1993.
- [3] A. J. Ijspeert. *Design of artificial neural oscillatory circuits for the control of lamprey- and salamander-like locomotion using evolutionary algorithms*. PhD thesis, University of Edimburg, 1998.
- [4] S. Ma, H. Araya, and L. Li. Development of a creeping snake-robot. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation*, pages 77–82, 2001.
- [5] D. Spenneberg, M. Albrecht, T. Backhaus, J. Hilljegerdes, F. Kirchner, and H. Zschenker. ARAMIES: A Four-legged Climbing and Walking Robot. In '*i-SAIRAS 2005*' - *The 8th International Symposium on Artificial Intelligence, Robotics and Automation in Space*, volume 603 of *ESA Special Publication*, August 2005.
- [6] Y. Umetani and S. Hirose. Biomechanical Study of Serpentine Locomotion. In *Proc. of the 1st RoManSySymp*, pages 171–184, 1974.
- [7] T.L. Williams and K.A. Sigvardt. Intersegmental phase lags in the lamprey spinal cord: experimental confirmation of the existence of a boundary region. *Journal of Computational Neuroscience*, 1:61–67, 1994.
- [8] M. Yim, D.G. Duff, and K. D. Roufas. PolyBot: a modular reconfigurable robot. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 1, pages 514–520, April 2000. Disponible en línea en <http://www2.parc.com/spl/projects/modrobots/publications/pdf/icra00.pdf> [Última consulta: 14-Mayo-2008].