

Solución al Problema DH del Robot KUKA

Robótica Industrial. Juan González-Gómez

March 31, 2011

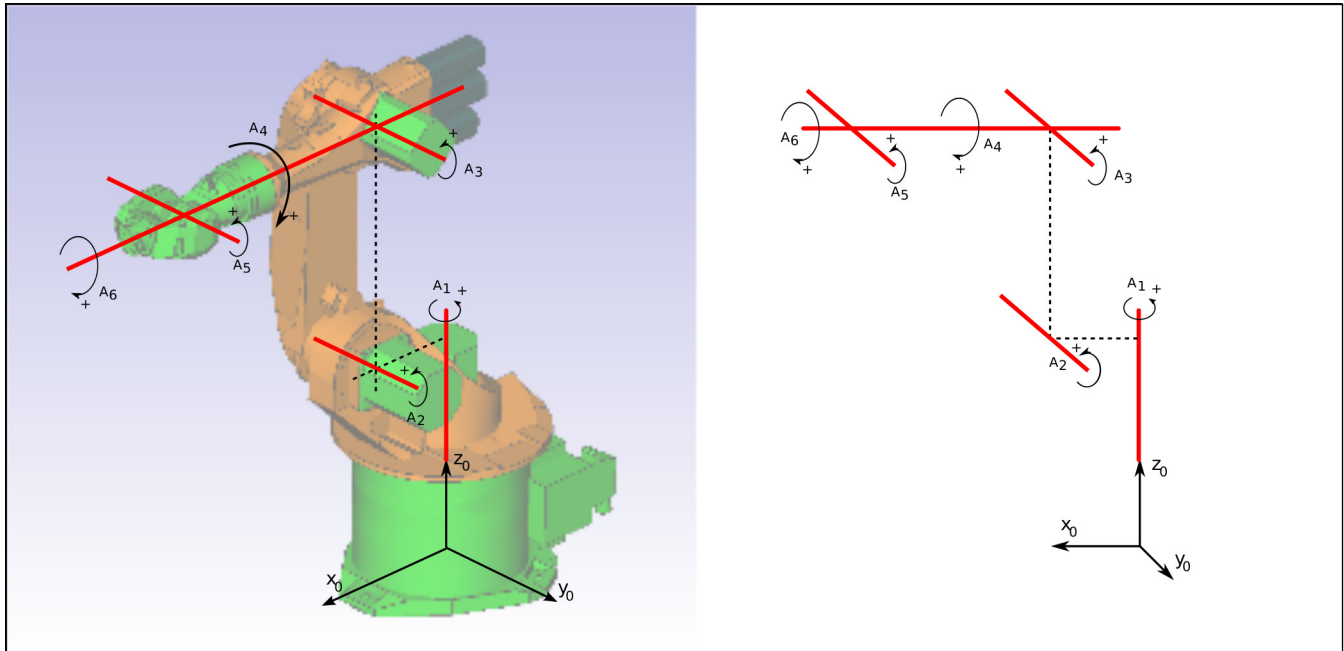
Problema 1

a) Situar los sistemas de coordenadas de cada eslabón

Seguimos los pasos del algoritmo de Denavit-Hartenberg. Como el robot tiene 6 GDL, habrá 6 articulaciones y 7 eslabones. Hay que determinar la localización de estos 7 sistemas de referencia. El único conocido es el inicial: $S_0\{x_0, y_0, z_0\}$

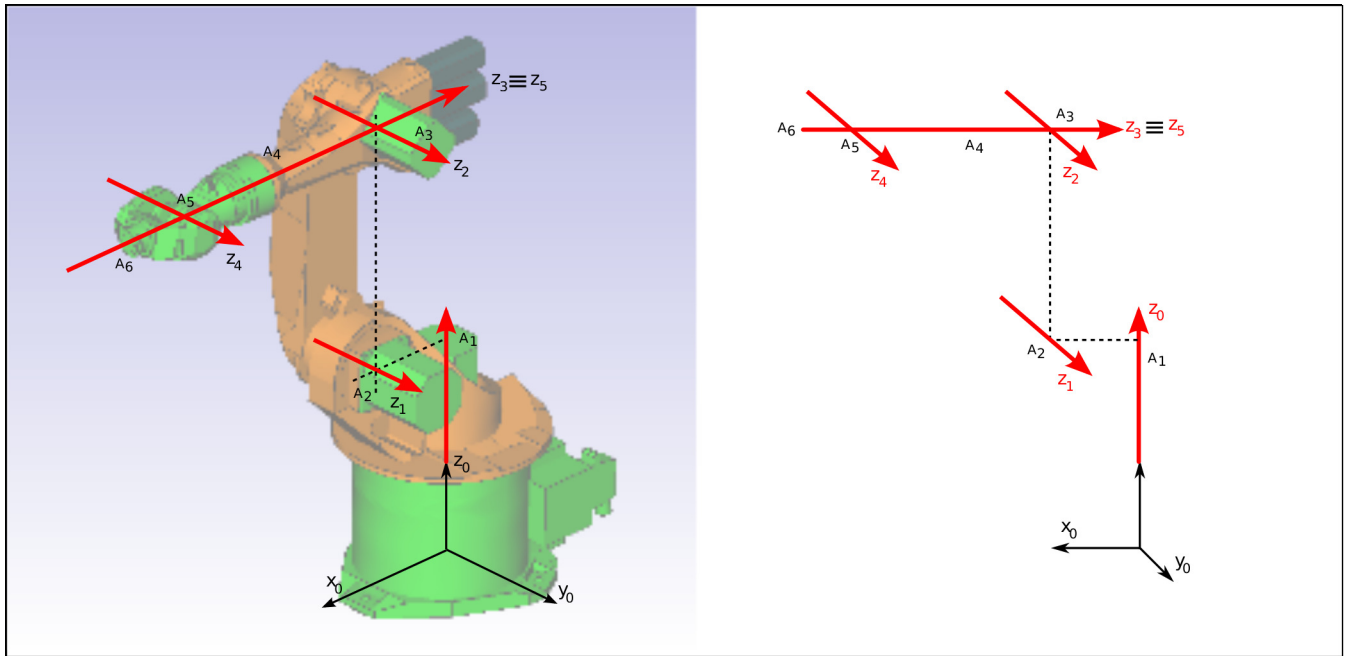
- Localizar los ejes de rotación de cada articulación

Primero localizamos los ejes de rotación de las 6 articulaciones del robot. Todas ellas son de rotación por lo que este eje será perpendicular al plano de rotación. Se muestran en la siguiente figura. Los ejes de las articulaciones A4 y A6 coinciden.



- Obtener los ejes z de cada sistema de coordenadas

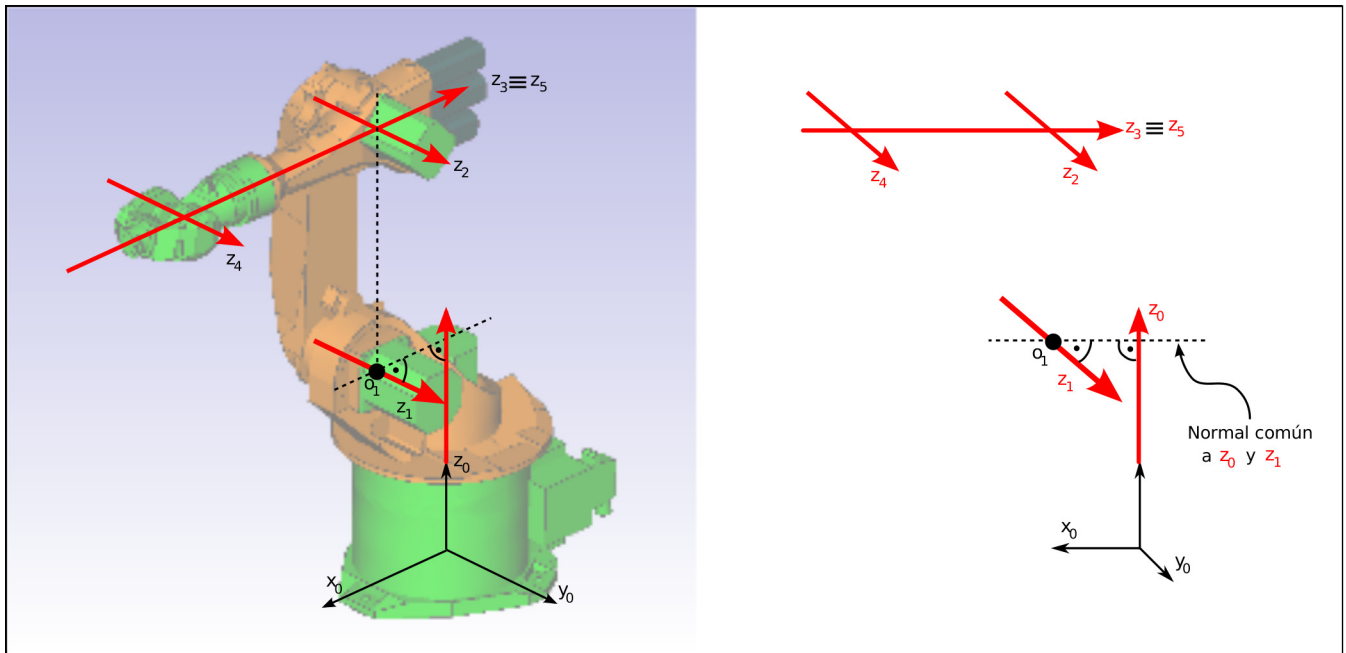
Estos ejes se corresponden con los ejes de rotación de cada articulación, encontrados en el paso anterior. Nos falta por determinar el sentido del eje. Esto lo hacemos por la regla de la mano derecha, de manera que el eje z coincida con el sentido de giro positivo del motor.



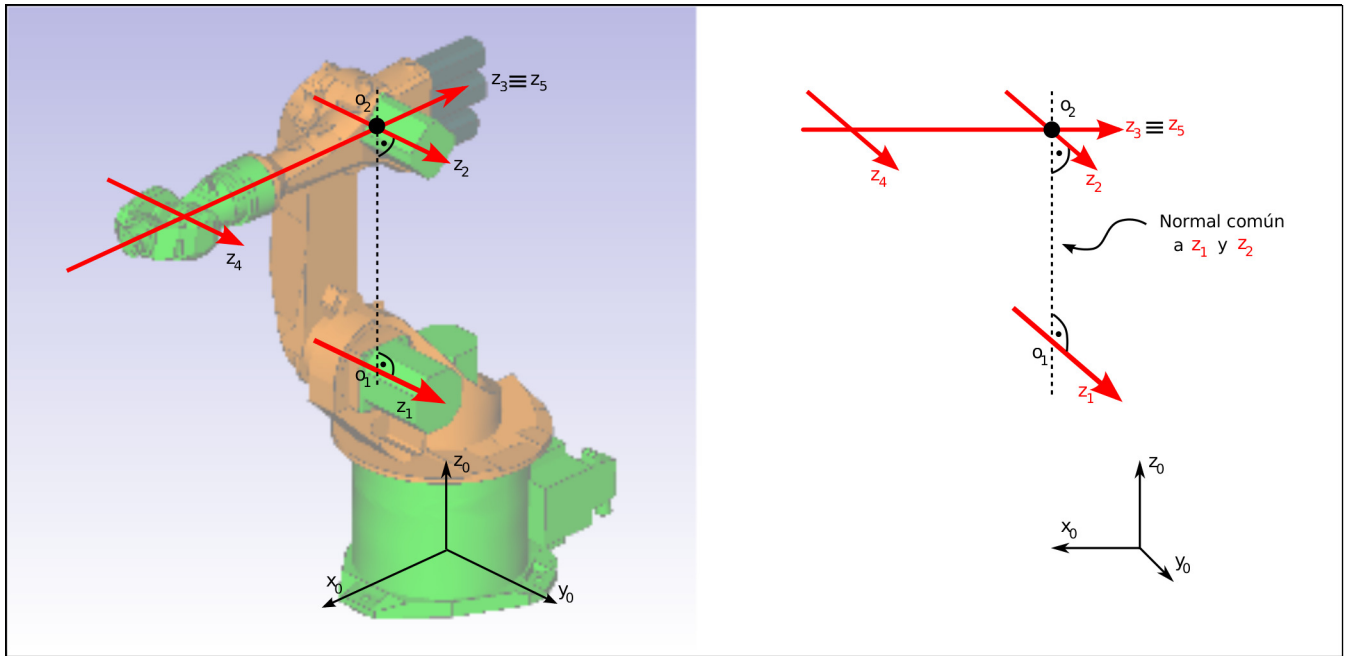
- Localizar los orígenes de cada sistema de coordenadas

Los orígenes de cada uno de los sistemas de coordenadas **NO TIENEN PORQUÉ COINCIDIR CON LA LOCALIZACIÓN DE CADA ARTICULACIÓN**. Se calculan comenzando por el sistema inicial S_0 .

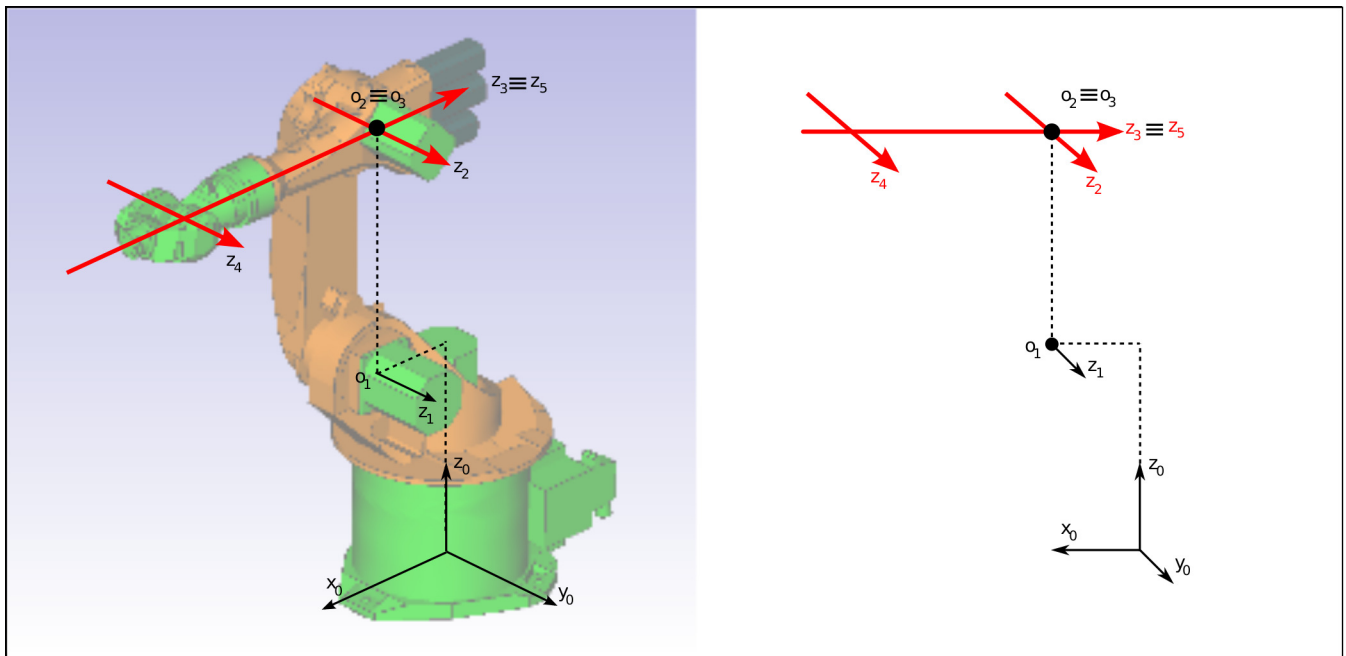
Nos fijamos en los ejes z_0 y z_1 . En este caso NO se cortan. Buscamos la línea perpendicular a ambos ejes que intersecta con ellos (se denomina *normal común* a z_0 y z_1). Sólo existe una. La dibujamos. En el punto de corte de esta línea con el eje z_1 se encuentra el origen o_1 del sistema de coordenadas $S_1\{x_1, y_1, z_1\}$.



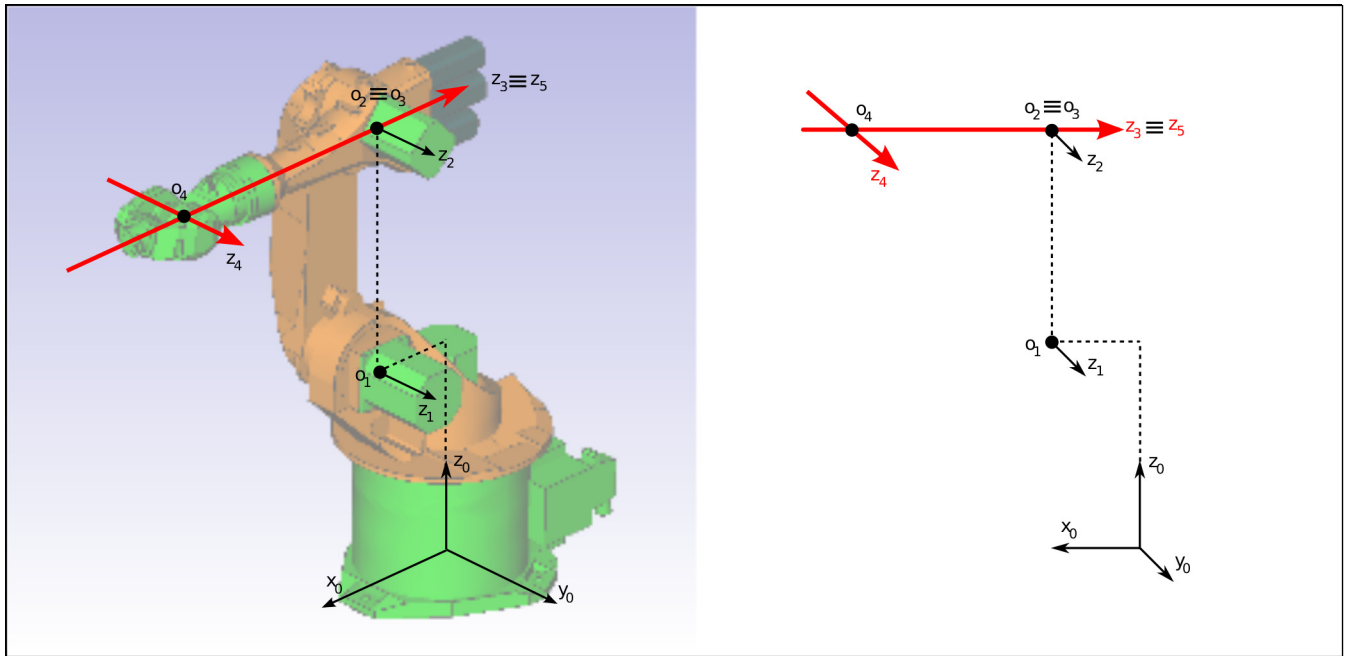
Ahora nos fijamos en z_1 y z_2 . Tampoco se cortan. Como en este caso son paralelos, existen infinitas normales comunes a ambos. De todas ellas elegimos la que pase por o_1 (de esta forma estamos obteniendo una tabla D-H más simple, ya que el parámetro d_2 será 0). Si elegimos cualquier otra que NO pase por o_1 , el parámetro d_2 NO será cero. El origen o_2 del sistema $\{x_2, y_2, z_2\}$ se obtiene en la intersección de esta normal común con el eje z_2 .



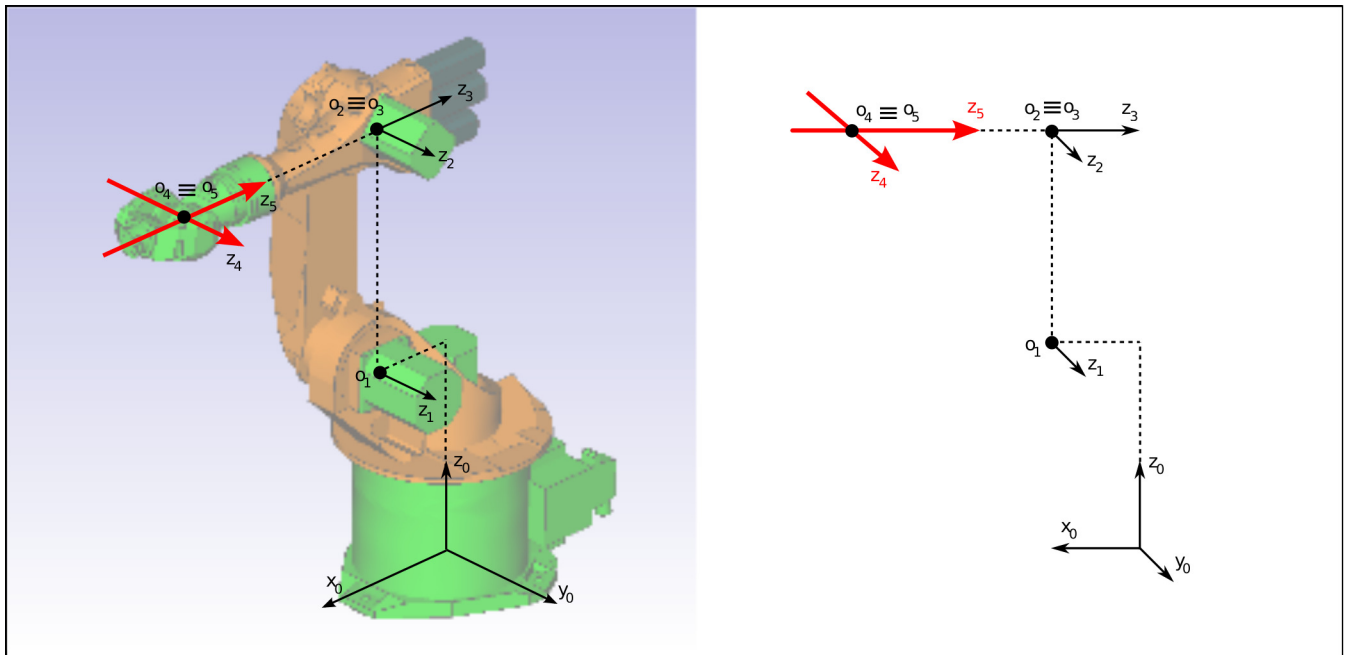
Vamos a por el siguiente origen. Nos fijamos en z_2 y z_3 . Se cortan en un punto. Ahí es donde estará el origen o_3 del sistema $\{x_3, y_3, z_3\}$. Además este punto coincide con o_2 . Por tanto, los sistemas S_2 y S_3 tienen el origen en el mismo punto.



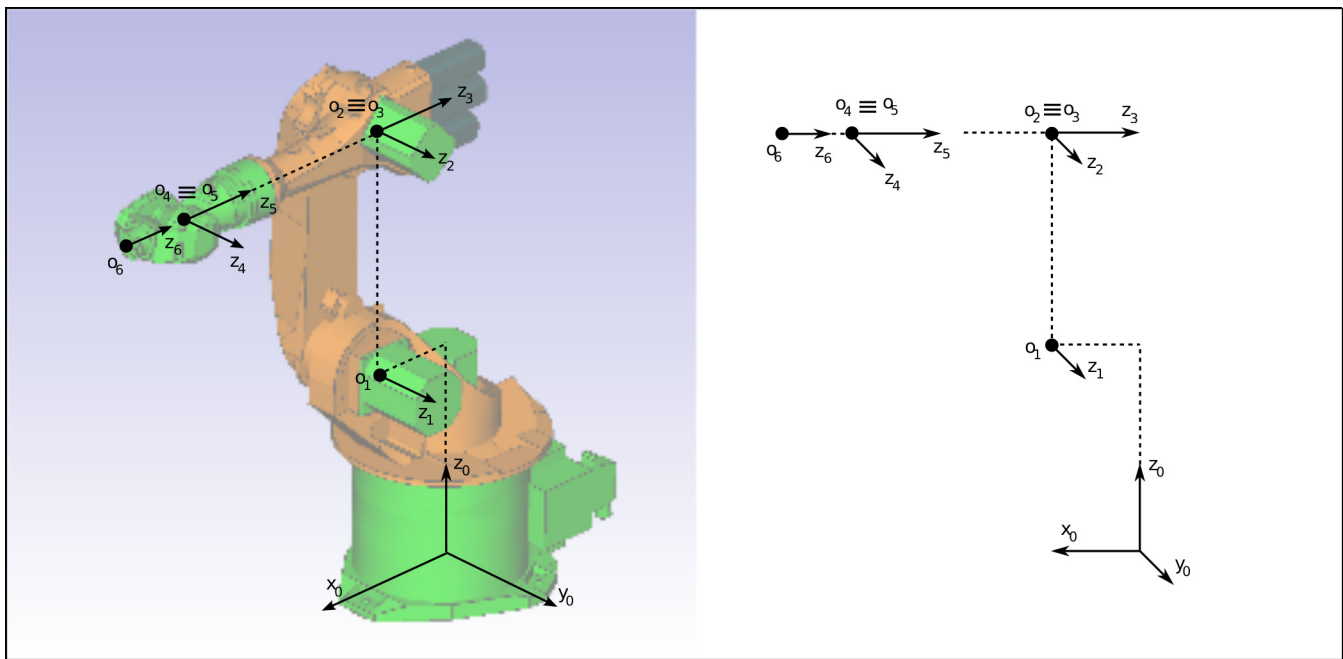
Repetimos para los ejes z_3 y z_4 . Igual que en el caso anterior, se cortan en un punto. Situamos ahí el origen o_4 del sistema $\{x_4, y_4, z_4\}$



Repetimos para los ejes z_4 y z_5 . Igual que en el caso anterior, se cortan en un punto. Situamos ahí el origen o_5 del sistema $\{x_5, y_5, z_5\}$. Los orígenes o_4 y o_5 coinciden.

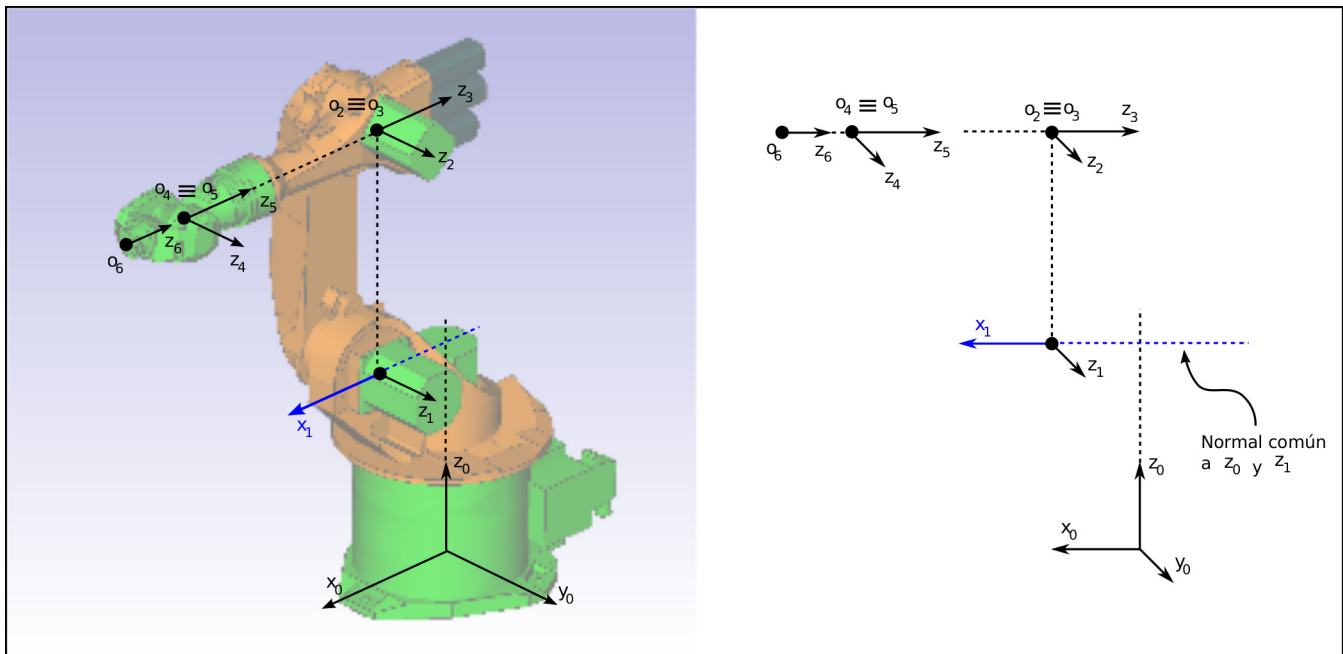


Por último, el eje z_6 lo colocamos en el extremo final, con la misma orientación que z_5 . Los ejes z del robot quedarían por tanto así:

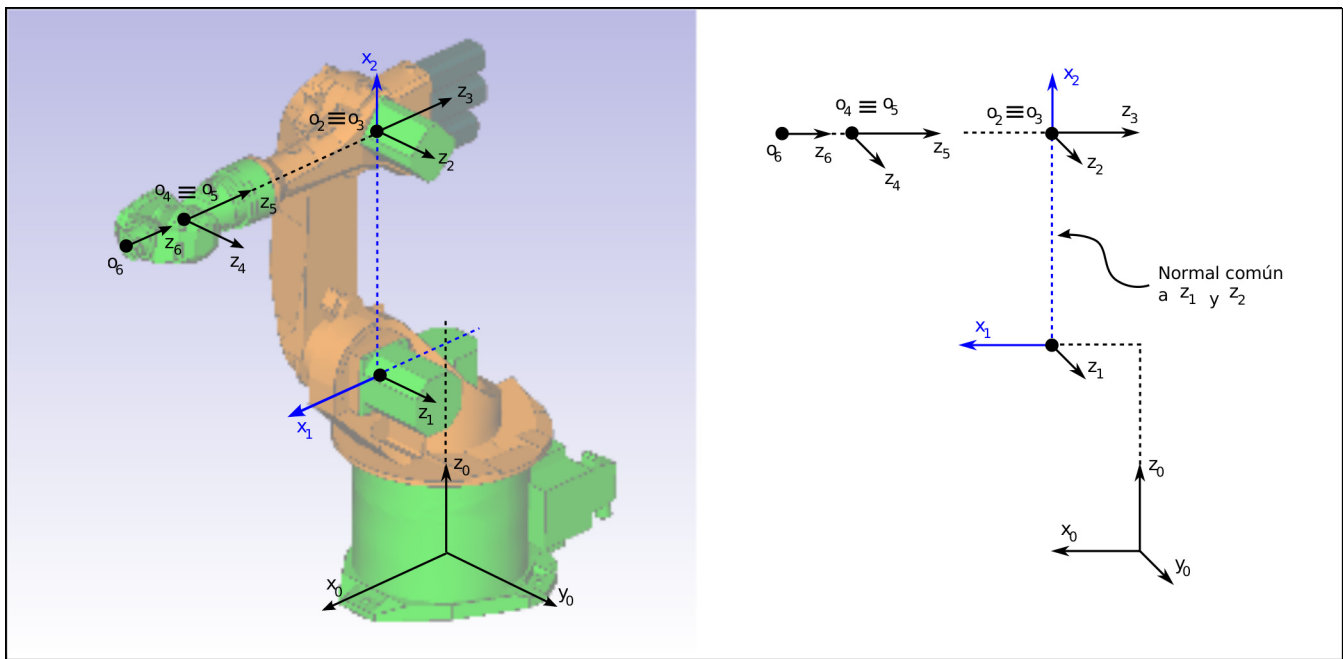


- Obtener los ejes x de cada sistema de coordenadas

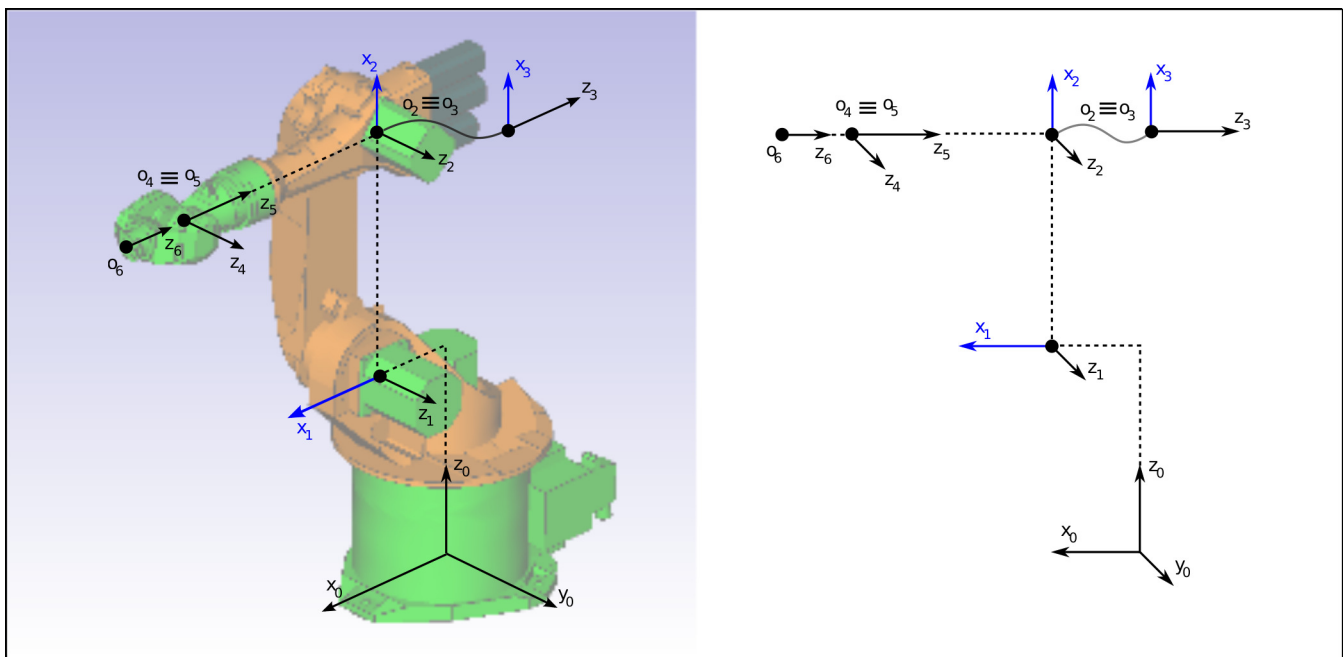
Comenzamos por el eje x_1 , que se encuentra en la normal común a los ejes z_0 y z_1 . El sentido lo escogemos de manera que sea igual a x_0 .



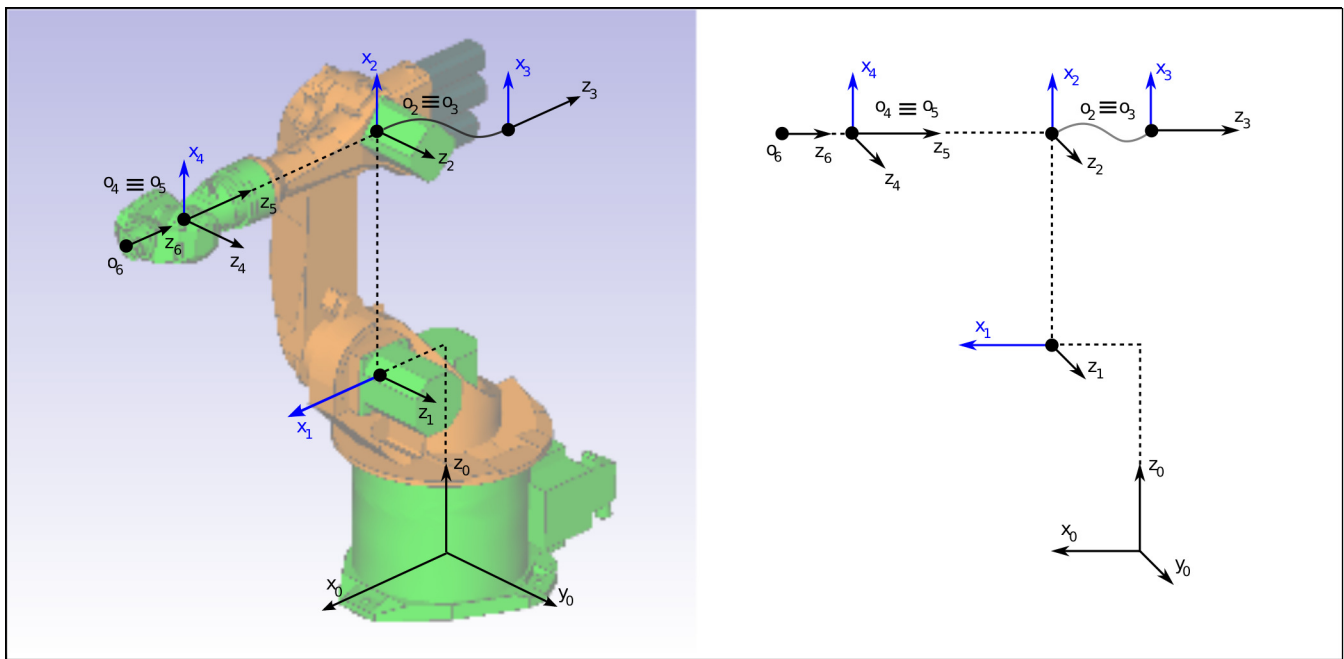
Para el eje x_2 nos fijamos en z_1 y z_2 . Lo situamos en la dirección determinada por la normal común a z_1 y z_2 . En este caso el sentido puede ser hacia arriba o hacia abajo (los dos son válidos). Elegimos el sentido “hacia arriba” ya que nos dará un valor del parámetro a_2 positivo.



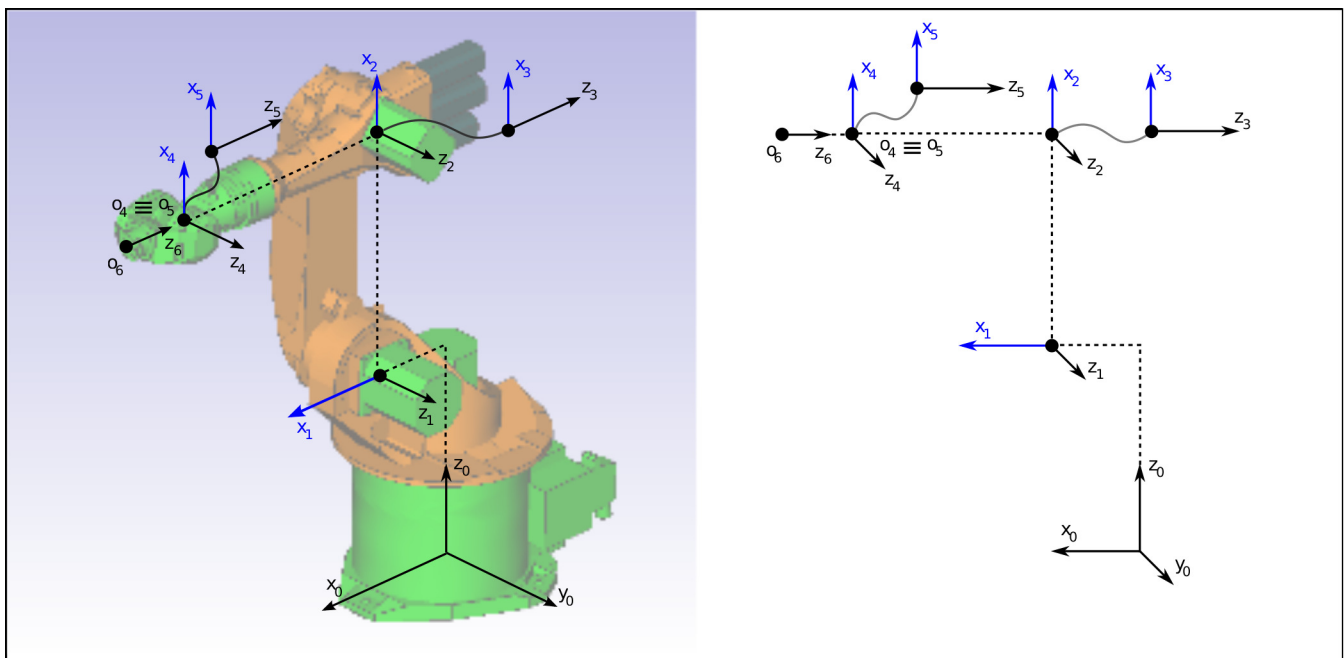
El eje x_3 está en la normal común a z_2 y z_3 . Y como sentido usamos el mismo que x_2 . Por ello, los eje x_2 y x_3 son coincidentes. En la figura se han dibujado separados para apreciarlo mejor, pero los orígenes están en el mismo punto



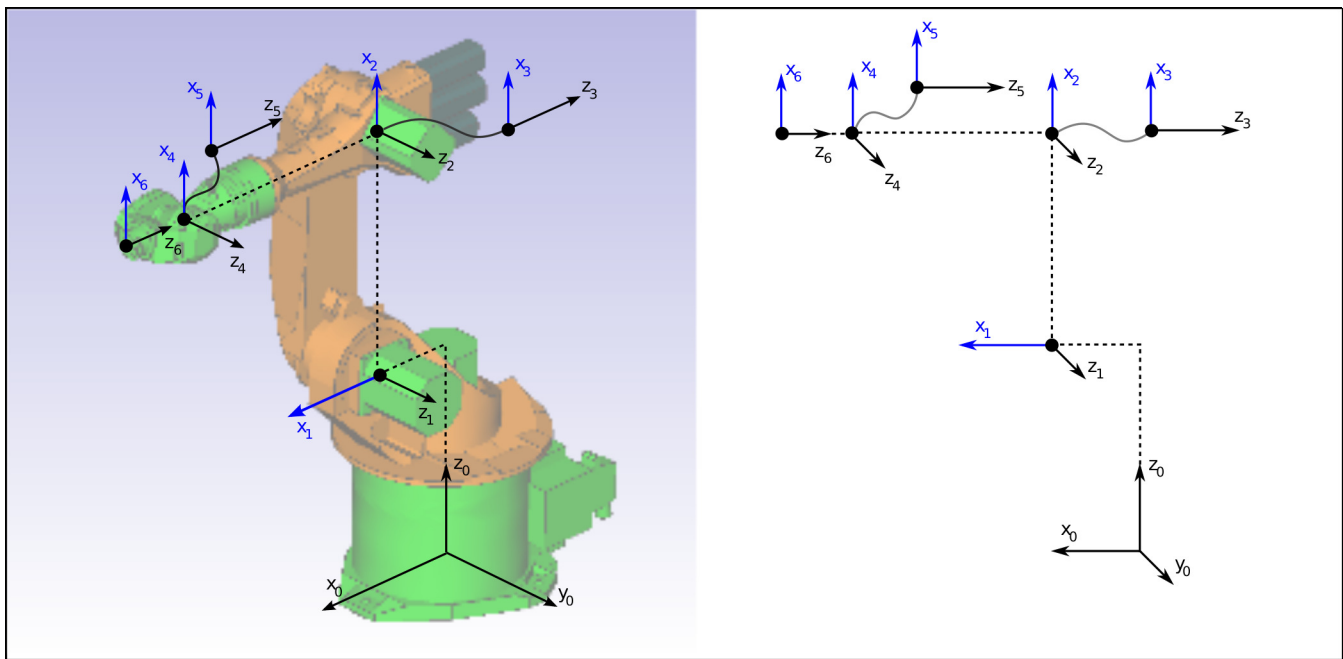
Eje x_4 : idem. Buscamos la normal común a z_3 y z_4 . El sentido lo tomamos igual al de x_3 :



Eje x_5 : Más de lo mismo. Lo situamos en la normal común a z_4 y z_5 . Tomamos el mismo sentido que el x_4 . Los dos ejes coinciden (x_4 y x_5). En la figura se muestran separados:

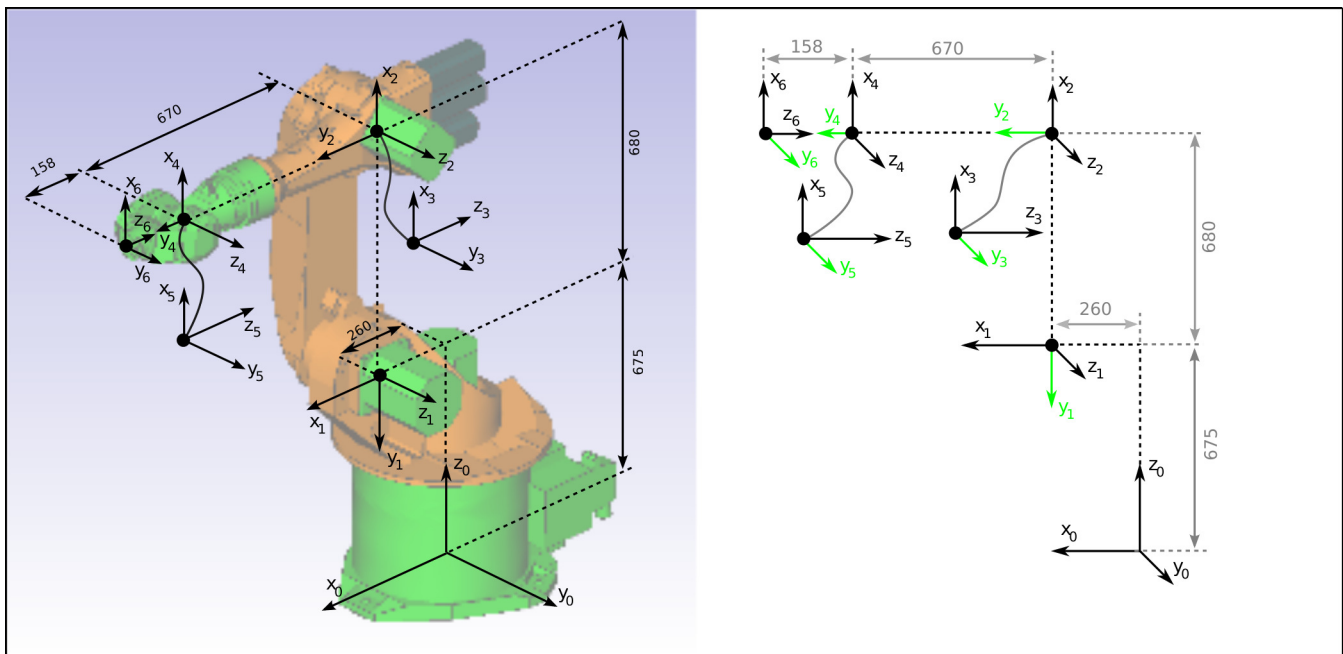


Por último se sitúa el eje x_6 paralelo al x_5 :



- **Obtener los ejes y:**

Ahora se añaden los ejes Y completando los triedros a derechas (Regla de la mano derecha: cuando los dedos van del eje x_i al y_i el pulgar apunta hacia la dirección positiva del eje z).



Ya tenemos todos los sistemas de referencia pedidos.

b) Obtener la tabla más simple de los parámetros Denavit-Hartenberg del robot

La solución se muestra en la siguiente tabla:

Articulación	θ	d	a	α
1	q_1	675	260	-90
2	$-90+q_2$	0	680	0
3	q_3	0	0	90
4	q_4	-670	0	-90
5	q_5	0	0	90
6	q_6	-158	0	0

Justificación: (por hacer...)

teta = ángulo que hay que girar sobre z0 para que x0 y x1 queden paralelos

d1 = Distancia sobre eje z0 que hay que desplazar S0 para que X0 y X1 queden alineados

a1 = distancia sobre eje x1 pque hay que desplazar a S0 para que su origen coincida con S1

alfal = angulo que hay que girar sobre x1 para que s0 coincida exactamente con S1

c) Posición del origen del sistema 1

Lo que nos piden es calcular las coordenadas del punto o_1 referidas al sistema S_0 . Se calculan mediante la siguiente ecuación:

$${}^0o_1 = {}^0T_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde 0T_1 es la matriz de transformación del sistema S_1 al S_0 . Se calcula a partir de los parámetros de Denavit-Hartenbert:

$${}^0T_1 = Rotz(q_1)Tras([0, 0, d_1])Tras([a_1, 0, 0])Rotx(\alpha_1)$$

donde $q_1 = 45$, $d_1 = 675$, $a_1 = 260$, $\alpha_1 = -90$. Las matrices son:

$$\bullet Rotz(q_1) = \begin{pmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet Tras([0, 0, d_1]) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 675 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet Tras([a_1, 0, 0]) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 260 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet Rotx(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La solución pedida es:

$${}^0o_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 675 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 260 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para facilitar los cálculos, empezamos multiplicando por la derecha (multiplicar el vector por la matriz Rotx):

$$o_1^0 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 675 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 260 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos el vector por la matriz $\text{Tras}([a_1, 0, 0])$:

$$o_1^0 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 675 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 260 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos el vector la matriz $\text{Tras}([0, 0, d_1])$:

$$o_1^0 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 260 \\ 0 \\ 675 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando ahora por la matriz Rotz :

$$o_1^0 = \begin{pmatrix} 260\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 260\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 675 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 183.85 \\ 183.85 \\ 675 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas del punto pedido son: (183.85, 183.85, 675)