

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad [3.23]$$

Y a su vez, un vector \mathbf{r}_{xyz} desplazado según \mathbf{T} tendrá como componentes \mathbf{r}'_{xyz} :

$$\begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad [3.24]$$

EJEMPLO 3.1

Según la Figura 3.12 el sistema O'UVW está trasladado un vector $\mathbf{p}(6, -3, 8)$ con respecto del sistema OXYZ. Calcular las coordenadas del vector \mathbf{r} en el sistema OXYZ, \mathbf{r}_{xyz} , sabiendo que las coordenadas en el sistema O'UVW son $\mathbf{r}'_{uvw}(-2, 7, 3)$.

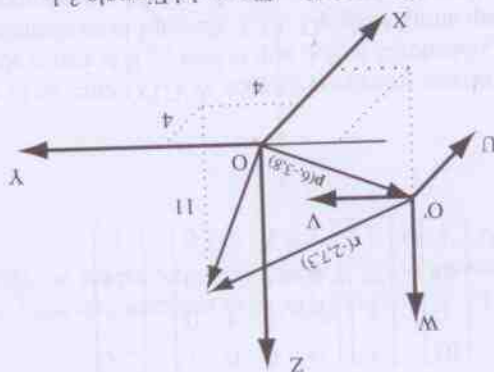


Figura 3.12. Figura del Ejemplo 3.1.

Aplicando la Ecuación [3.23] se obtiene:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Figura 3.11):

do O'UVW con
representar una

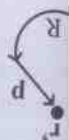
sistema O'UVW.

referencia fijo

escalado unidad

tomando la ul-

logías como
dimensional, así



agencia.

$\mathbf{r} = \mathbf{p}_i \mathbf{j} +$
una matriz

[3.22]

omo com-

✚ EJEMPLO 3.2

Calcular el vector r'_{xyz} resultante de trasladar al vector $r_{xyz}(4, 4, 11)$ según la transformación $T(p)$ con $p(6, -3, 8)$ (véase Figura 3.13).

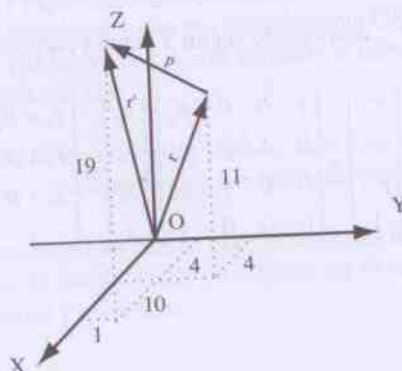


Figura 3.13. Figura del Ejemplo 3.2.

Aplicando la Ecuación [3.24] se obtiene:

$$\begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotación

Supóngase ahora que el sistema $O'UVW$ sólo se encuentra rotado con respecto al sistema $OXYZ$. La submatriz de rotación $R_{3 \times 3}$ será la que defina la rotación, y se corresponde al tipo de matriz de rotación presentada en el Epígrafe 3.2.1. De igual forma que se hacía allí, se pueden definir tres matrices homogéneas básicas de rotación según se realice ésta alrededor de cada uno de los tres ejes coordenados OX , OY y OZ del sistema de referencia $OXYZ$:

$$\text{Rot}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [3.25]$$

$$\text{Rot}_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [3.26]$$

Aplicand

$$\text{Rot } z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [3.27]$$

Un vector cualquiera \mathbf{r} , representado en el sistema girado O'UVW por $\mathbf{r}_{uvw} = (r_u, r_v, r_w)$, tendrá como componentes en el sistema OXYZ, $\mathbf{r}_{xyz} = (r_x, r_y, r_z)$ dadas por:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad [3.28]$$

Y a su vez, un vector \mathbf{r}_{xyz} rotado según \mathbf{T} vendrá expresado por \mathbf{r}'_{xyz} según:

$$\begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} \quad [3.29]$$

EJEMPLO 3.3

Según la Figura 3.14, el sistema OUVW se encuentra girado -90° alrededor del eje OZ con respecto al sistema OXYZ. Calcular las coordenadas del vector \mathbf{r}_{xyz} si sus coordenadas en el sistema OUVW son $\mathbf{r}_{uvw} = (4, 8, 12)^T$.

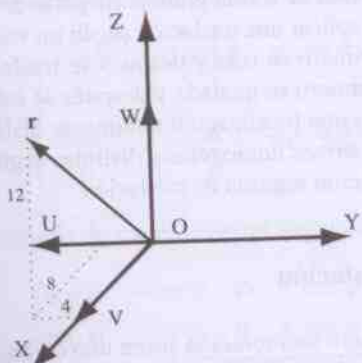


Figura 3.14. Figura del Ejemplo 3.3.

Aplicando la Ecuación [3.28] y la matriz de la Expresión [3.27] se tendrá:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 3.4

Un sistema OUVW ha sido girado 90° alrededor del eje OX y, posteriormente, trasladado un vector $p(8, -4, 12)$ con respecto al sistema OXYZ (Figura 3.16). Calcular las coordenadas (r_x, r_y, r_z) del vector r con coordenadas $r_{uvw}(-3, 4, -11)$.

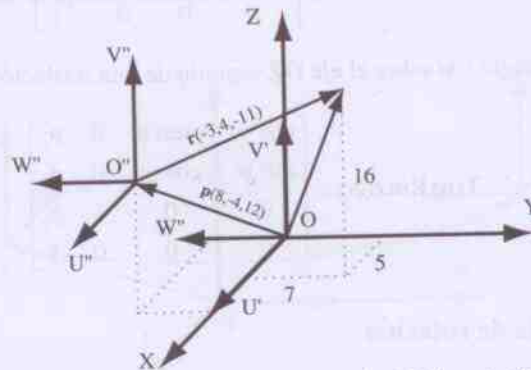


Figura 3.16. Sistemas de referencia del Ejemplo 3.4.

Utilizando la matriz de la Expresión [3.30] se tendrá:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 16 \\ 1 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 3.5

Un sistema OUVW ha sido trasladado un vector $p(8, -4, 12)$ con respecto al sistema OXYZ y girado 90° alrededor del eje OX (Figura 3.17). Calcular las coordenadas (r_x, r_y, r_z) del vector r de coordenadas $r_{uvw}(-3, 4, -11)$.

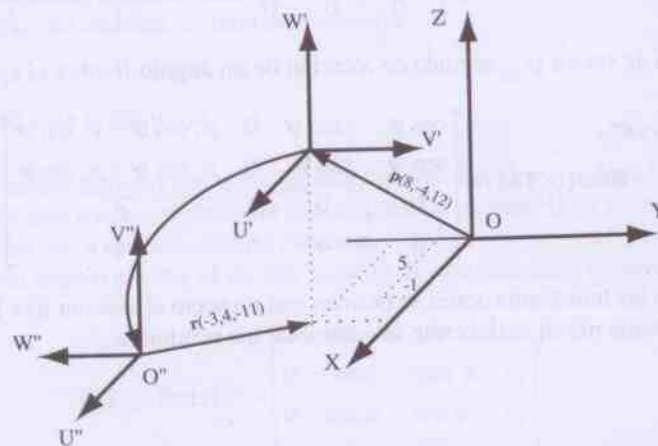


Figura 3.17. Situación de los sistemas de referencia del Ejemplo 3.5.

Utilizando la m

Perspectiva y esca

Las matrices homogé
componentes de un vCualquier vector
puede realizar un esa través de la cual,
 $r(x, y, z)$ puede serUna aplicación
póngase una lente s
(Figura 3.18). Se p
un punto $r'(x', y', z')$ Esta transforma
homogénea del tipPara las aplica
ninguna transform

Utilizando la matriz de la Expresión [3.30] se obtiene:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Perspectiva y escalado

Las matrices homogéneas también se pueden aplicar para la realización de un escalado de las componentes de un vector. Bastará utilizar una matriz T del tipo:

$$T = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [3.36]$$

Cualquier vector $r(x, y, z)$ puede ser transformado en el vector $r(ax, by, cz)$. También se puede realizar un escalado global de las tres componentes mediante la matriz:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \quad [3.37]$$

a través de la cual, utilizando la definición de coordenadas homogéneas, cualquier vector $r(x, y, z)$ puede ser transformado en un vector $r(x/s, y/s, z/s)$.

Una aplicación más de las matrices homogéneas es la transformación de perspectiva. Supóngase una lente situada sobre el plano OXZ con distancia focal f situada sobre el eje OY (Figura 3.18). Se puede comprobar que el punto $r(x, y, z)$ se ve en el plano de la lente como un punto $r'(x', y', z')$ cuyas coordenadas vienen dadas por la siguiente expresión:

$$x' = \frac{x}{1 - \frac{y}{f}} \quad y' = 0 \quad z' = \frac{z}{1 - \frac{y}{f}} \quad [3.38]$$

Esta transformación, denominada de perspectiva, puede realizarse a través de una matriz homogénea del tipo [Fu-88]:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/f & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad [3.39]$$

Para las aplicaciones en robótica de las matrices homogéneas, se supone que no existe ninguna transformación de perspectiva y que el escalado es siempre unitario.

es, logicamente, distinto:

[3.48]

Se quiere obtener la matriz de transformación que representa al sistema OVW ob-

de una traslación de vector $\mathbf{p}^{xy} = (5, 5, 10)$ y un giro de 90° sobre el eje OZ.

La secuencia de transformaciones es:

$$\text{Rotz}(-90^\circ) \leftarrow T(p) \leftarrow \text{Rotz}(90^\circ)$$

Para ello bastará multiplicar en el orden adecuado las diferentes matrices básicas. Puesto que las transformaciones se realizan referidas al sistema fijo (OXYZ) se deberá premultiplicar:

$$T = \text{Rotz}(90^\circ) T(p) \text{Rotz}(-90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En los ejemplos vistos anteriormente los ejes sobre los que se realizaban las operaciones correspondían al sistema fijo de referencia OXYZ. También es posible componer matrices de transformación de manera que las operaciones estén referidas en todo momento al sistema que está moviéndose. Para ello bastará únicamente con ir concatenando matrices en orden inverso. Por ejemplo, en la siguiente ecuación:

[3.49]

13.471

ángulo ϕ sobre el eje OX, seguido
ángulo ψ sobre el eje OZ, puede
olación:

formación homogénea sirve, entre los sobre un sistema de referencia, importancia cuando se componen las acciones consecutivos sobre un sistema de referencia en la aplicación con-

calizado por la matriz de transfer-

extremo del robot a su destino, por la pinza del robot, anteriores.

zación del extremo del robot.

Debido a que el producto de matrices no es conmutativo, tampoco lo es la composición de transformaciones. Si se invierte el orden de aplicación de las transformaciones, el resultado es, lógicamente, distinto:

$$T = \text{Rot}_x(\theta) \text{Rot}_y(\phi) \text{Rot}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha & 0 \\ 0 & S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & -C\phi S\theta & S\phi & 0 \\ S\alpha S\phi C\theta + C\alpha S\theta & -S\alpha S\phi S\theta + C\alpha C\theta & -S\alpha C\phi & 0 \\ -C\alpha S\phi C\theta + S\alpha S\theta & C\alpha S\phi S\theta + S\alpha C\theta & C\alpha C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [3.48]$$

EJEMPLO 3.6

Se quiere obtener la matriz de transformación que representa al sistema O'UVW obtenido a partir del sistema OXYZ mediante un giro de ángulo -90° alrededor del eje OX, de una traslación de vector $\mathbf{p}_{xyz} (5, 5, 10)$ y un giro de 90° sobre el eje OZ.

La secuencia de transformaciones es:

$$\text{Rot}_x(-90^\circ) \rightarrow T(\mathbf{p}) \rightarrow \text{Rot}_z(90^\circ)$$

Para ello bastará multiplicar en el orden adecuado las diferentes matrices básicas. Puesto que las transformaciones se realizan referidas al sistema fijo (OXYZ) se deberá premultiplicar:

$$T = \text{Rot}_z(90^\circ) T(\mathbf{p}) \text{Rot}_x(-90^\circ) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En los ejemplos vistos anteriormente los ejes sobre los que se realizaban las operaciones correspondían al sistema fijo de referencia OXYZ. También es posible componer matrices de transformación de manera que las operaciones están referidas en todo momento al sistema que está moviéndose. Para ello bastará únicamente con ir concatenando matrices en orden inverso. Por ejemplo, en la siguiente ecuación:

$$T = \text{Rot}_x(\theta) \text{Rot}_y(\phi) \text{Rot}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha & 0 \\ 0 & S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & -C\phi S\theta & S\phi & 0 \\ S\alpha S\phi C\theta + C\alpha S\theta & -S\alpha S\phi S\theta + C\alpha C\theta & -S\alpha C\phi & 0 \\ -C\alpha S\phi C\theta + S\alpha S\theta & C\alpha S\phi S\theta + S\alpha C\theta & C\alpha C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [3.49]$$

[3.47]

se muestra una matriz que se puede interpretar como un giro de ángulo ϕ sobre el eje OX del sistema fijo OXYZ, seguido de un giro de valor θ sobre el eje OV y un giro de ángulo ψ sobre el eje OW del sistema en movimiento O'UVW. Comparar con la matriz de la Ecuación [3.47], que representa las mismas transformaciones referidas a los ejes de un sistema OXYZ fijo de referencia.

EJEMPLO 3.7

Obtener la matriz de transformación que representa las siguientes transformaciones sobre un sistema OXYZ fijo de referencia: traslación de un vector $\mathbf{p}_{xyz}(-3, 10, 10)$; giro de -90° sobre el eje O'U del sistema trasladado y giro de 90° sobre el eje O'V del sistema girado.

La secuencia de transformaciones es:

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{Rot}_u(-90^\circ) \rightarrow \mathbf{Rot}_v(90^\circ)$$

Se escogen las matrices básicas correspondientes y se componen mediante postmultiplicación por estar definidas las transformaciones con referencia al sistema móvil.

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{p}) \mathbf{Rot}_x(-90^\circ) \mathbf{Rot}_y(90^\circ)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De forma general, a la hora de componer diversas transformaciones mediante matrices homogéneas, se han de tener en cuenta los siguientes criterios:

1. Si el sistema fijo OXYZ y el sistema transformado O'UVW son coincidentes, la matriz homogénea de transformación será la matriz 4×4 identidad, \mathbf{I}_4 .
2. Si el sistema O'UVW se obtiene mediante rotaciones y traslaciones definidas con respecto al sistema fijo OXYZ, la matriz homogénea que representa cada transformación se deberá premultiplicar sobre las matrices de las transformaciones previas.
3. Si el sistema O'UVW se obtiene mediante rotaciones y traslaciones definidas con respecto al sistema móvil, la matriz homogénea que representa cada transformación se deberá postmultiplicar sobre las matrices de las transformaciones previas.

Siguiendo estas indicaciones, cualquier composición de matrices homogéneas puede estudiarse como si se realiza cada transformación con respecto al sistema fijo o se realiza cada transformación con respecto al sistema móvil.

Por ejemplo, la transformación:

$$\mathbf{T} = \mathbf{Rot}_x(\phi) \mathbf{Rot}_z(\psi) \mathbf{Rot}_x(\theta) \quad [3.5]$$

puede verse como una rotación de θ sobre OY, seguida de una rotación ψ sobre OZ y de una rotación ϕ sobre OX del sistema fijo. O también puede verse cómo una rotación ϕ sobre el eje OU, seguida de una rotación ψ sobre el eje OW y de una rotación ϕ sobre el eje OV del sistema que está siendo transformado.

3.3.5.

Es frecuente utilizar un sistema de referencia asociado a las transformaciones distintas al sistema del mundo OX del manipulador a su e

Figura 3.20. Ejercicio

El extremo de la herramienta se transforma mediante la transformación ${}^E\mathbf{T}_W$. A la transformación ${}^M\mathbf{T}_E$ se le aplica la transformación ${}^E\mathbf{T}_W$ al objeto a través de la herramienta.

Se observa que el sistema OXYZ de dos maneras que se puede escribir:

Esta relación se puede expresar como en la Figura 3.21 [PAUL-81]. La herramienta bastará transformándose:

Cualquier otra relación puede obtenerse desde el objeto inicial a los arcos del gráfico