

Algebra de Boole

Andrés Prieto-Moreno Torres

19th November 2002

1 Introducción

El algebra de Boole es un modelo matemático que es la base del álgebra de conmutación, o aquél en que todos los elementos que lo forman tienen dos estados válidos posibles y que son opuestos entre sí. Por ejemplo abierto o cerrado, verdadero o falso, uno o cero, ... Este tipo de álgebra se empezó usando con relés y se ha continuado con los circuitos digitales basados en la electrónica de conmutación.

2 Definición y postulados

Un conjunto B dotado con dos operaciones algebraicas $+$ y $*$ es un álgebra de Boole, si y sólo si verifica los siguientes postulados:

1. Las operaciones $+$ y $*$ son **conmutativas**: $a + b = b + a$ y $a.b = b.a$ para todo a, b perteneciente a B .
2. Existen en B dos elementos distintos y representados por 0 (símbolo **identidad** para $+$) y 1 (símbolo **identidad** para $*$) respectivamente que cumplen:

$$(a) \quad a + 0 = 0 + a = a \quad \forall a \in B$$

$$(b) \quad a.1 = 1.a = a \quad \forall a \in B$$

3. Cada operación es **distributiva** para la otra, esto es

$$(a) \quad a + (b.c) = (a + b).(a + c)$$

$$(b) \quad a.(b + c) = (a.b) + (a.c) \quad \forall a, b, c \in B$$

4. Para cada elemento $a \in B$ existe un elemento **complementario** $\bar{a} \in B$ tal que

$$(a) \quad a + \bar{a} = 1$$

$$(b) \quad a.\bar{a} = 0$$

Las definiciones anteriores forman el álgebra de Boole, ahora bien, considerando un conjunto B formado por dos elementos $B = \{0, 1\}$ y con las operaciones $+$ y $*$ definidas de la forma indicada en la figura 1, se obtiene un algebra de Boole especial, llamado algebra de conmutación. Este será el empleado por nosotros para describir matemáticamente a nuestros sistemas digitales.

+	0	1
0	0	1
1	1	1

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Figure 1: Funciones $+$ y $*$ del álgebra de conmutación.

2.1 Teoremas del algebra de Boole

Además de las propiedades descritas anteriormente, un conjunto que tenga estructura de álgebra de Boole cumple los siguientes teoremas:

1. Idempotencia.

- (a) $b = b + b \quad \forall b \in B$
- (b) $b = b.b \quad \forall b \in B$

2. Para cualquier elemento b en un álgebra de Boole se verifica

- (a) $b + 1 = 1$
- (b) $b.0 = 0$

3. Absorción. Para cada par de elementos en un álgebra de Boole se verifica.

- (a) $a + a.b = a$
- (b) $a.(a + b) = a$

4. En un álgebra de Boole las operaciones suma y producto son asociativas

- (a) $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$
- (b) $a.(b.c) = (a.b).c = a.b.c$

5. Para cada elemento b en un álgebra de Boole su complemento $\bar{b}$ es único.

6. Teorema de Morgan: Para todos los elementos b_1 y b_2 en un álgebra de Boole se verifica.

- (a) $\overline{(b_1 + b_2 + b_3 \dots + b_n)} = \bar{b}_1.\bar{b}_2.\bar{b}_3 \dots \bar{b}_n$
- (b) $\overline{\bar{b}_1.\bar{b}_2.\bar{b}_3 \dots \bar{b}_n} = \bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3 + \dots + \bar{b}_n$

7. Teorema de Shannon: El complementario de una función se obtiene reemplazando cada variable por su complementaria y, al mismo tiempo, intercambiando las operaciones $+$ y $*$.

- (a) $\overline{f(x_1, x_2, \dots, x_n, +, *)} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, *, +)$

8. Teorema de expansión.

- (a) $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = x_1.f(1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \bar{x}_1.f(0, x_2, x_3, \dots, x_n)$
- (b) $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = [x_1 + f(0, x_2, x_3, \dots, x_n)].[\bar{x}_1 + f(1, x_2, x_3, \dots, x_n)]$

Según las expresiones anteriores se dice que la función se ha expandido ó desarrollado respecto a x_1 . Análogamente se podría haber desarrollado con respecto a cualquiera de las otras variables. Podemos comprobar las igualdades anteriores haciendo las sustituciones $x_1 = 1$, $\bar{x}_1 = 0$ y luego $x_1 = 0$, $\bar{x}_1 = 1$, en cada expresión, obteniéndose identidades en ambos casos.